3 ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

3.1 Булевы функции

Зафиксируем некоторое двухэлементное множество. Элементы этого множества обычно обозначаются через 0, 1 или через ложь, истина. Примем компромиссный вариант, используя 0 и 1, но называя 0 ложью, а 1 — истиной.

Высказывания — это переменные, принимающие значения из этого двухэлементного множества $\{0, 1\}$. Мы будем высказывания обозначать заглавными латинскими буквами или заглавными латинскими буквами с индексами.

Множество $\{0, 1, \dots\}$ — это множество натуральных чисел.

Для натуральных i будем рассматривать множества $\{0, 1\}^i$ всевозможных последовательностей длины i, составленных из нулей и единиц. Последовательность длины 0 — это пустая последовательность. Если $\pi_1 \dots \pi_i$ — это последовательность длины i, то $\pi_1 \dots \pi_i 0$ и $\pi_1 \dots \pi_i 1$ представляют собой последовательности длины $i + 1$. В частности, имеется всего две последовательности длины 1: $'1'$ и $'0'$. Имеется 4 последовательности длины 2, 8 последовательностей длины 3. Вообще, для натурального i имеется 2^i последовательностей длины i. Перечислим, например, все последовательности длины 3: ’000’, ’010’, ’100’, ’110’, ’001’, ’011’, ’101’, ’111’.

Отображение из $\{0, 1\}^i$ в $\{0, 1\}$ называется булевой функцией от i аргументов. Такое отображение из высказываний $X_1, \dots, X_i$ строит новое высказывание X. При заданных значениях $X_1, \dots, X_i$ значение X определяется однозначно, но, вообще говоря, зависит от заданных значений $X_1, \dots, X_i$.

Для некоторых булевых функций вводят специальные обозначения и названия. Функция одного аргумента X, равная 1, если X равен 0, и равная 0, если X равен 1, называется отрицанием и обычно обозначается через $\neg X$.

Рассмотрим также несколько булевых функций от двух аргументов, собранных в таблицу:

X	Y	$\&$	$\vee$	$\to$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Функции $\&$, $\vee$, $\to$ называются, соответственно, конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией. Они и отрицание называются иногда также пропозициональными связками.

Имея обозначения для нескольких конкретных булевых функций и для высказываний, можно строить обозначения и для более сложных булевых функций. Эти обозначения называются формулами. Понятие формулы зависит от того, какой набор первоначальных булевых функций рассматривается. Мы рассмотрим случай, когда рассматривается набор $\{\neg, \&, \vee, \to\}$.

Определение 3.1.1 (формулы логики высказываний).

а). Каждое высказывание — формула логики высказываний.

б). Если Φ *и* Ψ *— формулы логики высказываний, то* $(\Phi \& \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$, $\neg\Phi$ *— тоже формулы логики высказываний.*

в). Каждая вещь является формулой логики высказываний, только если это можно доказать, используя а) и б).

Например, $\neg()$ не является формулой логики высказываний. Действительно, это выражение не является высказыванием (т.е. заглавной латинской буквой, возможно, с индексами). Если оно получалось бы по пункту б), то () было бы формулой, а это невозможно (формула либо содержит один из знаков $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$, либо является высказыванием). С другой стороны, выражения $(X \vee Y)$, $((X \vee Y) \to \neg X)$ являются формулами логики высказываний.

Каждая формула логики высказываний содержит вхождения высказываний.

Определение 3.1.2 (вхождения высказывания в формулу).

а). Если Φ *есть* X, *то* X *входит в* Φ. *Если* Φ *есть высказывание, отличное от* X, *то* X *не входит в* Φ.

б). Если Φ *есть* $(\Psi \vee \Theta)$, $(\Psi \& \Theta)$, $(\Psi \to \Theta)$, *то* X *входит в* Φ *тогда и только тогда, когда* X *входит в* Ψ *или когда* X *входит в* Θ.

в). Если Φ *есть* $\neg\Psi$, *то* X *входит в* Φ *тогда и только тогда, когда* X *входит в* Ψ.

Определение 3.1.3 (функциональной сложности формулы).

а). Если Φ *есть высказывание, то функциональная сложность* Φ *равна* 0.

б). Функциональная сложность $(\Phi \& \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ *есть* $k_1 + k_2 + 1$, *где* k_1 *— функциональная сложность* Φ, *а* k_2 *— это функциональная сложность* Ψ.

в). Функциональная сложность $\neg\Phi$ *— это* $k+1$*, где* k *— это функциональная сложность* Φ*.*

Таким образом, функциональная сложность формулы — это число вхождений в нее пропозициональных связок. Например, $((X \vee Y) \to \neg X)$ содержит высказывания X и Y и имеет функциональную сложность 3.

Если формула Φ содержит высказывания $X_1, \ldots, X_n$ и не содержит других высказываний, то она определяет булеву функцию от n аргументов следующим образом. Придадим $X_1, \ldots, X_n$ значения ϵ_1 ,$\ldots$,ϵ_n, каждое из которых есть либо 0, либо 1, и вычислим при этих значениях аргументов значение формулы Ψ.

Определение 3.1.4 (значения формулы).

а). Если Φ *есть* X_i*, то значение* Φ *есть* ϵ_i *(*$i = 1, \ldots, n$*).*

б). Если Φ *есть* $\neg\Psi$ *и значение* Ψ *есть* ϵ*, то значение* Φ *есть* $\neg\epsilon$ *(при этом* $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$*).*

в). Если Φ *есть* $(\Psi \& \Theta)$, $(\Psi \vee \Theta)$ *или* $(\Psi \to \Theta)$*, значение* Ψ *есть* ϵ *и значение* Θ *есть* τ*, то значение, соответственно, есть* $\epsilon \& \tau$, $\epsilon \vee \tau$ *или* $\epsilon \to \tau$*.*

Например, если X равен 1, а Y равен 0, то значение $((X \vee Y) \to \neg X)$ равно 0.

Перебирая всевозможные значения $X_1, \ldots, X_n$ и приписывая каждому такому набору значений соответствующее значение формулы, получим так называемую таблицу истинности для этой формулы.

Например, для $((X \vee Y) \to \neg X)$ имеем следующую таблицу истинности:

X	Y	$((X \vee Y) \to \neg X)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Интересно, что каждая булева функция определяется некоторой формулой.

Теорема 3.1 (связь булевых функций и формул). *Пусть* i *— целое положительное число. Каждая булева функция от* i *аргументов определяется некоторой формулой, содержащей высказывания* $X_1, \ldots,$ X_i *и не содержащей других высказываний.*

Доказательство. Индукцией по i.

Базис. При $i = 1$ имеется всего 4 булевы функции от i аргументов: f_1 такая, что $f_1(x) = x$ для любых значений x, f_2 такая, что $f_2(x) = \neg x$ для любых значений x, f_3 такая, что $f_3(x) = 0$ для любых значений x, f_4 такая, что $f_4(x) = 1$ для любых значений x. Эти функции соответственно определяются формулами:

$$X;\ \neg X;\ (X \& \neg X);\ (X \vee \neg X).$$

Индукционный шаг. Пусть теорема доказана для булевых функций от i аргументов. Рассмотрим функцию f от $i+1$ аргумента. При каждом фиксированном значении ϵ последнего аргумента из этой функции получается функция от i аргументов, которую мы обозначаем через f_ϵ. Пусть f_ϵ определяется формулой Φ_ϵ, содержащей $X_1, \ldots, X_i$ и не содержащей других высказываний. Тогда формула

$$((\Phi_0 \& \neg X_{i+1}) \vee (\Phi_1 \& X_{i+1})) \tag{6}$$

определяет f.

Действительно, на наборе $\epsilon_1 \ldots \epsilon_i \epsilon_{i+1}$ при $\epsilon_{i+1} = 0$ значение f равно значению f_0 на наборе $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i)$ и, по определению, равно значению Φ_0 при $X_1 = \epsilon_1, \ldots, X_i = \epsilon_i$. Значение же формулы (6) при $X_1 = \epsilon_1, \ldots,$ $X_i = \epsilon_i$, $X_{i+1} = 0$ совпадает со значением Φ_0.

Рассуждение при $\epsilon_{i+1} = 1$ аналогично. ∎

Определение 3.1.5 (тавтологии). *Формула, принимающая значение* 1 *при любых значениях входящих в нее высказываний, называется тождественно истинной или тавтологией.*

Спрашивается, каким образом описать все тавтологии.

3.2 Формулировка исчисления высказываний

Итак, мы рассмотрели алфавит, содержащий знаки $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, скобки и знаки для высказываний. Некоторые последовательности элементов этого алфавита мы назвали формулами. Формулам мы придали некоторый смысл: формулы определяют булевы функции. Нашей ближайшей задачей будет описание механизма, который порождает все тавтологии.

Для большей наглядности формулировок, мы кроме формул будем рассматривать также последовательности формул и называемые *секвенциями* выражения вида $\Gamma \vdash \Phi$, где $\vdash$ — новый символ — *символ секвенции*, Γ — последовательность, возможно пустая, формул, а Φ — формула.

Γ называется левой частью секвенции $\Gamma \vdash \Phi$, а Φ называется правой частью секвенции $\Gamma \vdash \Phi$. У секвенции $\vdash \Phi$ левая часть пуста.

Высказывание входит в секвенцию, если оно входит в левую или правую часть этой секвенции. Высказывание входит в последовательность формул, если оно входит в одну из формул этой последовательности.

Если формулы определяли булевы функции, то секвенции — это записи некоторых утверждений о булевых функциях.

Определение 3.2.1 (истинности секвенции). *Скажем, что секвенция истинна, если при любых значениях входящих в нее высказываний из того, что все формулы, входящие в левую часть секвенции, получили значение* 1 *(стали истинными, как мы будем говорить), формула, стоящая в правой части секвенции, тоже стала истинной. Секвенция с пустой левой частью истинна, если правая часть — тождественно истинная формула. Остальные секвенции назовем ложными.*

Например, секвенция

$$(A \to B)\ (B \to C)\ (C \to X) \vdash\ (A \to X)$$

истинна.

Действительно, если A ложна, то $(A \to X)$ истинна. Если же $(A \to B)$, $(B \to C)$, $(C \to X)$ и A истинны, то последовательно получаем, что B, C тоже истинны, значит, и X истинно, а тогда и $(A \to X)$ тоже истинна.

Напротив, секвенция

$$(X \vee (Y \to X)) \vdash Z$$

ложна. Например, при $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$ левая часть ее равна 1, а правая равна 0.

Легко, конечно, заметить, что истинность секвенции

$$\Phi_1\ \Phi_2 \ldots \Phi_s \vdash \Phi$$

равносильна тому, что формула

$$(\Phi_1 \to (\Phi_2 \to (\ldots (\Phi_s \to \Phi) \ldots)))$$

является тавтологией.

Легко видеть, что любая секвенция вида $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула, истинна.

Определение 3.2.2 (аксиомы). *Секвенции вида $\Phi \vdash \Phi$, где Φ — формула, назовем аксиомами.*

Определение 3.2.3 (схем главных правил вывода). *Следующие схемы задают правила введения и удаления:*

	Введение	*Удаление*
$\&$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi \quad \Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}{\Gamma \vdash \Phi} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)}$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi) \quad \Gamma\,\Phi \vdash \Theta \quad \Gamma\,\Psi \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta}$
$\to$	$\dfrac{\Gamma\,\Phi \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi)}$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi) \quad \Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Psi}$

Всего в этой таблице собрано 8 схем правил вывода. Мы их нумеруем по строчкам, начиная с первой строки. Например, схемы

$$\frac{\Gamma \vdash (\Phi \& \Psi)}{\Gamma \vdash \Psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Psi}{\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)}$$

имеют номера 3 и 5, соответственно.

Обозначение схемы начинается с обозначения ее строки. Схемы, стоящие в первом столбце, имеют дополнительное обозначение вв, а схемы из второго столбца — уд. Между двумя частями обозначения ставится дефис. Таким образом, схема 7 имеет обозначение $\to$-вв, а схема 6 — $\vee$-уд. Заметим, что схемы 2 и 3 имеют одно и то же обозначение. Обозначения схем 4 и 5 тоже совпадают.

В этих схемах 1—8 и в следующих 9—11, Γ, Δ — последовательности (возможно, пустые) формул, а Φ, Ψ, Θ — формулы.

Определение 3.2.4 (схемы 9 правил вывода от противного).

$$\frac{\Gamma \neg\Phi \vdash \Psi \quad \Gamma \neg\Phi \vdash \neg\Psi}{\Gamma \vdash \Phi}$$

Определение 3.2.5 (дополнительных схем 10 и 11).

$$\frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma\, \Psi \vdash \Phi}$$

$$\frac{\Gamma\, \Phi\, \Psi\, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma\, \Psi\, \Phi\, \Delta \vdash \Theta}$$

Для схемы 9 мы используем обозначение не или $\neg$, схему 10 называем утончением и обозначаем через ут, а схему 11 — перестановкой и обозначаем через пер.

Схемы 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11 — однопосылочные схемы; 1, 8, 9 — двухпосылочные схемы; а 6 — трехпосылочная.

Определение 3.2.6 (правила вывода). *Выберем в качестве* Γ, Δ *некоторые конкретные последовательности формул (возможно, пустые), а в качестве* Φ, Ψ, Θ *— конкретные формулы. После такого выбора подставим в схему выбранного номера вместо* Γ, Δ, Φ, Ψ, Θ *их выбранные значения. Получим фигуру, над чертой которой стоят одна, две, или три секвенции (в зависимости от выбранного номера схемы), а под чертой — одна секвенция. Полученную фигуру назовем правилом вывода. Скажем, что секвенция, стоящая под чертой, получается из секвенций, стоящих над чертой, по этому правилу вывода.*

Например, секвенция

$$(A \to B) \vdash (A \to B)$$

получается из секвенции

$$(A \to B) \;\; A \vdash B$$

по следующему правилу вывода. Надо в схеме 7 в качестве Γ взять $(A \to B)$ и в качестве Φ взять A, а в качестве Ψ взять B.

Определение 3.2.7 (доказательства). *Доказательством называется конечная последовательность секвенций, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих секвенций той же последовательности по правилу вывода. Доказательство является доказательством своей последней секвенции. Секвенция называется доказуемой или теоремой), если она имеет доказательство.*

Заметим, что если к доказательству приписать (справа или слева) доказательство, то снова получим доказательство.

Пример 3.2.1 (доказательства).

Мы будем приводить доказательства вместе с их анализом. Анализ доказательства состоит в указании, по какой схеме и из каких предыдущих секвенций получена данная секвенция. Это указание дается в скобках после каждой секвенции. Схема указывается своим обозначением, предыдущие секвенции — своими номерами. Если секвенция включается в доказательство как аксиома, указание имеет вид: (акс). Мы не будем в анализе указывать, каким образом данное правило вывода получено из указанной схемы. Другими словами, мы не указываем, что выбирать в качестве Γ, Δ, Φ, Ψ, Θ.

1. $A \vdash A$ *(акс)*
2. $B \vdash B$ *(акс)*
3. $A\,B \vdash A$ *(ут,1)*
4. $B\,A \vdash B$ *(ут,2)*
5. $A\,B \vdash B$ *(пер.4)*
6. $A\,B \vdash (A\&B)$ (&-*вв, 3, 5)*

Более наглядный способ изображения доказательств — это деревья доказательств. В корне такого дерева находится доказуемая секвенция, а секвенция, метящая вершину, получается из секвенций, метящих непосредственных предков этой вершины, по одному из правил вывода. Висячие вершины при этом метятся аксиомами.

Определение 3.2.8 (дерева доказательства).

а). Фигура, состоящая из одной секвенции, называется деревом. Эта секвенция называется корнем этого дерева и висячей вершиной этого дерева. Высота этого дерева равна 0.

б). Если

$$\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\gamma}$$

является правилом вывода, D_1 *и* D_2 *— деревья, корнями которых являются секвенции* π_1 *и* π_2*, то фигура*

$$\frac{\gamma}{D_1 \quad D_2}$$

называется деревом с корнем γ*. Висячими вершинами этого дерева являются висячие вершины* D_1 *и* D_2 *и только они. Высота этого дерева* $k+1$*, где* k *— наибольшая из высот деревьев* D_1 *и* D_2*.*

в). Если

$$\frac{\pi}{\gamma}$$

является правилом вывода, D_1 — дерево, корнем которого является секвенции π, то фигура

$$\frac{\gamma}{D_1}$$

называется деревом с корнем γ. Висячими вершинами этого дерева являются висячие вершины D_1 и только они. Высота этого дерева $k+1$, где k — высота дерева D_1.

г). Если

$$\frac{\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3}{\gamma}$$

является правилом вывода, D_1, D_2 и D_3 — деревья, корнями которых являются секвенции π_1, π_2 и π_3, то фигура

$$\frac{\gamma}{D_1 \quad D_2 \quad D_3}$$

называется деревом с корнем γ. Висячими вершинами этого дерева являются висячие вершины D_1, D_2 и D_3 и только они. Высота этого дерева $k+1$, где k — наибольшая из высот деревьев D_1, D_2 и D_3.

д). Некоторая вещь является деревом только в том случае, если это можно доказать, используя пункты а)—г) определения 3.2.8.

Дерево называется деревом доказательства, если все его висячие вершины — аксиомы.

Одна и та же секвенция может несколько раз встречаться в дереве, например, входить в качестве вершины и еще где-то.

Теорема 3.2 (композиция деревьев). *Если D — дерево с корнем π, а D_2 получается из дерева D_1 заменой висячей вершины π на дерево D, то D_2 — дерево.*

Доказательство. Индукцией по высоте дерева D_1. Если высота равна 0, то D_2 есть D. В общем случае D_1 имеет один из видов

$$\frac{\pi'}{D'}, \quad \frac{\pi'}{D' \quad D''}, \quad \frac{\pi'}{D' \quad D'' \quad D'''}$$

Для определенности, пусть рассматриваемая висячая вершина входит в D'. По индукционному предположению, если ее в D' заменить на D, то получим из D' дерево D_2'. Но D_2 есть соответственно

$$\frac{\pi'}{D_2'}, \quad \frac{\pi'}{D_2' \quad D''}, \quad \frac{\pi'}{D_2' \quad D'' \quad D'''}$$

По определению, D_2 есть дерево. ∎

Теорема 3.3 (критерий доказуемости секвенции). *Секвенция тогда и только тогда является теоремой, когда она является корнем некоторого дерева доказательства.*

Доказательство. Пусть секвенция является теоремой. Тогда имеется доказательство $\pi_1 \ldots \pi_s$, последняя секвенция которого — это рассматриваемая секвенция. Индукцией по s докажем, что рассматриваемая секвенция является корнем некоторого дерева доказательства.

Если $s = 1$, то π_s является аксиомой и корнем дерева доказательства. Если π_s есть аксиома,то она является корнем дерева доказательства (являющегося этой аксиомой). Если же π_s получается из предыдущих секвенций рассматриваемого доказательства по правилу вывода, то эти предыдущие секвенции, по индукционному предположению, являются корнями некоторых деревьев доказательства. Фигура, над чертой которой стоит π_s, а под чертой — эти деревья доказательства, является деревом доказательства с корнем π_s.

Пусть секвенция является корнем некоторого дерева доказательства. Индукцией по высоте этого дерева докажем, что эта секвенция является теоремой.

Если высота этого дерева равна 0, то рассматриваемая секвенция есть аксиома. Если высота этого дерева положительна, то рассматриваемая секвенция получается по правилу вывода из секвенций, каждая из которых является корнем дерева доказательства меньшей высоты. Поэтому эти секвенции — теоремы, а рассматриваемая секвенция получается по правилу вывода из теорем. Если написать последовательно доказательства этих теорем, а в заключение рассматриваемую секвенцию, то получим доказательство рассматриваемой секвенции. ∎

Следствие 3.4. *Если секвенция является корнем дерева, все висячие вершины которого — доказуемые секвенции, то эта секвенция тоже доказуема.*

Доказательство. Используем теоремы 3.3 и 3.2. ∎

Пример 3.2.2 (дерева доказательства).

$$\dfrac{A\ B \vdash (A\&B)}{\dfrac{A\ B \vdash A}{\text{акс}\ \ A \vdash A}\ \text{ут} \qquad \dfrac{A\ B \vdash B}{\dfrac{B\ A \vdash B}{B \vdash B\ \text{акс}}\ \text{ут}}\ \text{пер}}\ \& - \text{вв}$$

Пример 3.2.3 (дерева доказательства).

Заметим, что секвенция $\vdash (A \vee \neg A)$ *доказуема. Пусть* Θ *обозначает формулу* $\neg(A\vee\neg A)$, Φ *обозначает формулу* $(A\vee\neg A)$ *и* Ψ *обозначает формулу* $\neg\neg A$. *Следующее дерево является деревом доказательства.*

$$
\dfrac{\vdash \Phi}{
\dfrac{\neg\Phi \vdash A}{
\dfrac{\Theta\ \neg A \vdash \Phi}{\dfrac{\neg A\ \Theta \vdash \Phi}{\dfrac{\neg A \vdash \Phi}{\neg A \vdash \neg A \text{ акс}}\,{\scriptstyle \vee-\text{вв}}}\,{\scriptstyle \text{ут}}}\,{\scriptstyle \text{пер}}
\quad
\dfrac{\Theta\ \neg A \vdash \Theta}{\Theta \vdash \Theta \text{ акс}}\,{\scriptstyle \text{ут}}
}\,{\scriptstyle \neg}
\quad
\dfrac{\neg\Phi \vdash \neg A}{
\dfrac{\Theta\ \Psi \vdash \Phi}{\dfrac{\Psi\ \Theta \vdash \Phi}{\dfrac{\Psi \vdash \Phi}{\dfrac{\Psi \vdash A}{
\dfrac{\Psi\ \neg A \vdash \neg A}{\dfrac{\neg A\ \Psi \vdash \neg A}{\neg A \vdash \neg A \text{ акс}}\,{\scriptstyle \text{ут}}}\,{\scriptstyle \text{пер}}
\quad
\dfrac{\Psi\ \neg A \vdash \Psi}{\Psi \vdash \Psi \text{ акс}}\,{\scriptstyle \text{ут}}
}\,{\scriptstyle \neg}}\,{\scriptstyle \vee-\text{вв}}}\,{\scriptstyle \text{ут}}}\,{\scriptstyle \text{пер}}
\quad
\dfrac{\Theta\ \Psi \vdash \Theta}{\Theta \vdash \Theta \text{ акс}}\,{\scriptstyle \text{ут}}
}\,{\scriptstyle \neg}
}\,{\scriptstyle \neg}
$$

3.3 Полнота исчисления высказывания

Теорема 3.5 (истинность доказуемых секвенций).

Все доказуемые секвенции истинны.

Доказательство. Индукцией по длине доказательства секвенции.

Если длина равна 0, то секвенция — аксиома, а все аксиомы истинны. Если секвенции π_1, π_2 и π_3 истинны, а секвенция π получается из некоторых из них по правилу вывода, то π тоже истинна. Проверка этого утверждения сводится к разбору 11 случаев в зависимости от того, по какой схеме получается рассматриваемое правило вывода. Рассмотрение дополнительных схем очень просто, как и рассмотрение некоторых главных схем. Поэтому мы рассмотрим только схемы 6, 7, 8, 9. Пусть при заданных значениях входящих в Γ, Φ, Ψ, Θ высказываний все формулы из Γ истинны.

Схема 6. Либо истинна формула Φ, либо истинна формула Ψ, так как секвенция $\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)$ истинна. В первом случае из истинности $\Gamma\ \Phi \vdash \Theta$ следует, что истинна Θ, во втором случае из истинности $\Gamma\ \Psi \vdash \Theta$ следует, что истинна Θ.

Схема 7. Если Φ ложна, то $(\Phi \to \Psi)$ истинна. Если же Φ истинна, то Ψ тоже истинна, так как $\Gamma\ \Phi \vdash \Psi$ истинна. Значит, $(\Phi \to \Psi)$ тоже истинна.

Схема 8. Из истинности $\Gamma \vdash \Phi$ следует, что Φ истинна. Поэтому из истинности $\Gamma \vdash (\Phi \to \Psi)$ следует, что $(\Phi \to \Psi)$ и, значит, Ψ тоже истинна.

Схема 9. Из истинности $\neg\Phi$ следует, что и Ψ, и $\neg\Psi$ истинны, а это невозможно. Поэтому истинна Φ. ∎

Определение 3.3.1. *Пусть* $\{\Phi_1\}^{\&}$ *есть* Φ_1 *и* $\{\Phi_1 \dots \Phi_i \Phi_{i+1}\}^{\&}$ *есть*

$$(\{\Phi_1 \dots \Phi_i\}^{\&} \& \Phi_{i+1}).$$

Лемма 3.6. *а). Секвенция* $\Phi_1 \dots \Phi_s \vdash \Phi$ *тогда и только тогда доказуема, когда доказуема секвенция*

$$\vdash (\{\Phi_1 \dots \Phi_s\}^{\&} \to \Phi).$$

б). Первая из этих секвенций тогда и только тогда истинна,когда истинна вторая.

Доказательство. Предварительно индукцией по s доказываем доказуемость секвенции

$$\Phi_1 \dots \Phi_s \vdash \{\Phi_1 \dots \Phi_s\}^{\&}.$$

При $s = 1$ эта секвенция является аксиомой. Пусть эта секвенция доказуема. Пусть Ψ обозначает $\Phi_1 \dots \Phi_s$. Тогда заменяя в фигуре

$$\cfrac{\Psi\ \Phi \vdash \{\Psi\ \Phi\}^{\&}}{\cfrac{\Psi\ \Phi \vdash \{\Psi\}^{\&}}{\Psi \vdash \{\Psi\}^{\&}}\ {\scriptstyle\text{ут}} \qquad \begin{array}{c|l} \Psi\ \Phi \vdash \Phi & \\ \hline \dots & {\scriptstyle\text{пер}} \\ \dots & \\ \hline \Phi\ \Psi \vdash \Phi & {\scriptstyle\text{пер}} \\ \hline \dots & {\scriptstyle\text{ут}} \\ \dots & \\ \hline \Phi \vdash \Phi \text{ акс} & {\scriptstyle\text{ут}} \end{array}}\ {\scriptstyle \&-\text{вв}}$$

левую висячую вершину на дерево доказательства с таким же корнем, получим нужное дерево доказательства.

а). Доказываем индукцией по s. При $s = 1$ из доказуемости $\Phi_1 \vdash \Phi$ следует, что в фигуре

$$\frac{\vdash (\Phi_1 \to \Phi)}{\Phi_1 \vdash \Phi} \to -\text{вв}$$

висячую вершину можно заменить на дерево доказательства. Наоборот, из доказуемости $\vdash (\Phi_1 \to \Phi)$ следует, что в фигуре

$$\cfrac{\Phi_1 \vdash \Phi}{\cfrac{\Phi_1 \vdash (\Phi_1 \to \Phi)}{\vdash (\Phi_1 \to \Phi)}\ \text{ут} \quad \Phi_1 \vdash \Phi_1 \text{ акс}} \to -\text{уд}$$

левую висячую вершину можно заменить на дерево доказательства с таким же корнем.

Пусть а) доказано для s. Пусть доказуема секвенция

$$\Phi_1 \dots \Phi_s \Phi_{s+1} \vdash \Phi.$$

Тогда доказуема секвенция

$$\Phi_1 \dots \Phi_s \vdash (\Phi_{s+1} \to \Phi).$$

По индукционному предположению, доказуема секвенция

$$\vdash (\{\Phi_1 \dots \Phi_s\}^{\&} \to (\Phi_{s+1} \to \Phi)).$$

Пусть Θ обозначает $\Phi_1 \dots \Phi_s$ и Π обозначает $\{\Phi_1 \dots \Phi_s\ \Phi_{s+1}\}$. Заменяя в фигуре

$$\cfrac{\cfrac{\Pi^{\&} \vdash (\Phi_{s+1} \to \Phi) \qquad \cfrac{\Pi^{\&} \vdash \Pi^{\&} \text{акс}}{\Pi^{\&} \vdash \Phi_{s+1}}\&-\text{уд}}{\Pi^{\&} \vdash \Phi} \to -\text{уд}}{\vdash (\Pi^{\&} \to \Phi)} \to -\text{вв}$$

левую висячую вершину на дерево

$$\cfrac{\cfrac{\vdash (\{\Theta\}^{\&} \to (\Phi_{s+1} \to \Phi))}{\Pi^{\&} \vdash (\{\Theta\}^{\&} \to (\Phi_{s+1} \to \Phi))}\text{ут} \qquad \cfrac{\Pi^{\&} \vdash \Pi^{\&}\ \text{акс}}{\Pi^{\&} \vdash \{\Theta\}^{\&}}\&-\text{уд}}{\Pi^{\&} \vdash (\Phi_{s+1} \to \Phi)} \to -\text{уд}$$

и затем в полученном дереве заменяя левую висячую вершину на дерево доказательства с таким же корнем, получим нужное дерево доказательства.

Пусть секвенция

$$\vdash (\{\Theta\ \Phi_{s+1}\}^{\&} \to \Phi)$$

доказуема. В дереве

$$\cfrac{\Theta\ \Phi_{s+1} \vdash \{\Theta\ \Phi_{s+1}\}^{\&} \qquad \cfrac{\vdash (\{\Theta\ \Phi_{s+1}\}^{\&} \to \Phi)}{\Theta\ \Phi_{s+1} \vdash (\{\Theta\ \Phi_{s+1}\}^{\&} \to \Phi)}\ \text{ут} \dots \text{ут}}{\Theta\ \Phi_{s+1} \vdash \Phi} \to -\text{уд}$$

висячие вершины — доказуемые секвенции. Поэтому корень этого дерева тоже доказуем.

б). Очевидно. ∎

Определение 3.3.2 (эквивалентности формул). *Формулы Φ и Ψ назовем эквивалентными, если обе секвенции $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Phi$ доказуемы. Формулу Φ назовем доказуемой, если секвенция $\vdash \Phi$ доказуема. Пишем $\Phi \equiv \Psi$, если формулы Φ и Ψ эквивалентны.*

Лемма 3.7 (об эквивалентности формул).

а). Отношение эквивалентности формул рефлексивно, транзитивно и симметрично. Значит, оно действительно является отношением эквивалентности на множестве формул.

б). Если одна из эквивалентных формул тождественно истинна, то другая тоже тождественно истинна.

в). Если одна из эквивалентных формул доказуема, то другая тоже доказуема.

Доказательство.

а). Так как $\Phi \vdash \Phi$ доказуема, то отношение $\equiv$ рефлексивно.

Если $\Phi \equiv \Psi$ и $\Psi \equiv \Theta$, то $\Phi \vdash \Psi$ и $\Psi \vdash \Theta$ доказуемы. Поэтому, заменяя висячие вершины в фигуре

$$\dfrac{\Phi \vdash \Theta}{\dfrac{\Phi \vdash (\Psi \to \Theta)}{\dfrac{\vdash (\Psi \to \Theta)}{\Psi \vdash \Theta}\ \to -\text{вв}}\ \text{ут} \quad \Phi \vdash \Psi}\ \to -\text{уд}$$

на деревья доказательства с такими же корнями, получим дерево доказательства с корнем $\Phi \vdash \Theta$. Аналогично доказывается доказуемость секвенции $\Theta \vdash \Phi$. Значит, отношение $\equiv$ транзитивно.

Симметричность этого отношения очевидна.

б). Из эквивалентности Φ и Ψ следует доказуемость $\vdash (\Phi \to \Psi)$. Поэтому формула $(\Phi \to \Psi)$ тождественно истинна (теорема 1). Если еще и Φ тождественно истинна, то Ψ тоже тождественно истинна.

в). Пусть $\vdash \Phi$ и $\Phi \vdash \Psi$ доказуемы. Заменим в фигуре

$$\dfrac{\vdash \Psi}{\dfrac{\vdash (\Phi \to \Psi)}{\Phi \vdash \Psi}\ \to -\text{вв} \quad \vdash \Phi}\ \to -\text{уд}$$

висячие вершины на деревья доказательства с соответствующими корнями. Получим дерево доказательство секвенции $\vdash \Psi$. ∎

Лемма 3.8 (о замене).

Пусть $\Phi \equiv \Psi$. *Тогда*

а). $(\Phi \& \Theta) \equiv (\Psi \& \Theta)$,

б). $(\Theta \& \Phi) \equiv (\Theta \& \Psi)$,

в). $(\Phi \vee \Theta) \equiv (\Psi \vee \Theta)$,

г). $(\Theta \vee \Phi) \equiv (\Theta \vee \Psi)$,

д). $\neg\Phi \equiv \neg\Psi$.

Доказательство. а). Пусть Π обозначает $(\Phi\&\Theta)$.

$$\dfrac{\Pi \vdash (\Psi\&\Theta)}{\dfrac{\Pi\vdash\Psi}{\dfrac{\Pi\vdash(\Phi\to\Psi)}{\dfrac{\vdash(\Phi\to\Psi)}{\Phi\vdash\Psi}\to-\text{вв}}\text{ут}\quad \dfrac{\Pi\vdash\Phi}{\Pi\vdash\Pi\text{ акс}}\&-\text{уд}}\to-\text{уд}\quad \dfrac{\Pi\vdash\Theta}{\Pi\vdash\Pi\text{ акс}}\&-\text{уд}}\&-\text{вв}$$

б). Доказывается аналогично.
в). Пусть Π обозначает $(\Phi\vee\Theta)$.

$$\dfrac{\Pi\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\Pi\vdash\Pi\text{ акс}\quad \dfrac{\Pi\ \Phi\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\dfrac{\Phi\ \Pi\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\dfrac{\Phi\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\Phi\vdash\Psi}\vee-\text{вв}}\text{ут}}\text{пер}\quad \dfrac{\Pi\ \Theta\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\dfrac{\Theta\ \Pi\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\dfrac{\Theta\vdash(\Psi\vee\Theta)}{\Theta\vdash\Theta\text{ акс}}\vee-\text{вв}}\text{ут}}\text{пер}}\vee-\text{уд}$$

г). Доказывается аналогично.
д).

$$\dfrac{\neg\Phi\vdash\neg\Psi}{\dfrac{\neg\Phi\ \neg\neg\Psi\vdash\Phi}{\dfrac{\neg\neg\Psi\ \neg\Phi\vdash\Phi}{\dfrac{\neg\neg\Psi\vdash\Phi}{\neg\neg\Psi\vdash\Psi\quad \dfrac{\neg\neg\Psi\vdash(\Psi\to\Phi)}{\dfrac{\vdash(\Psi\to\Phi)}{\Psi\vdash\Phi}\to-\text{вв}}\text{ут}}\to-\text{уд}}\text{ут}}\text{пер}\quad \dfrac{\neg\Phi\ \neg\neg\Psi\vdash\neg\Phi}{\neg\Phi\vdash\neg\Phi\text{ акс}}\text{ут}}\neg$$

Лемма доказана. ■

Лемма 3.9 (булевы эквивалентности).
1). $(\Psi\to\Theta)\equiv(\neg\Psi\vee\Theta)$;
2). $(\Psi\&\Theta)\equiv(\Theta\&\Psi)$;
3). $(\Psi\vee\Theta)\equiv(\Theta\vee\Psi)$;
4). $((\Psi\&\Theta)\&\Phi)\equiv(\Psi\&(\Theta\&\Phi))$;
5). $((\Psi\vee\Theta)\vee\Phi)\equiv(\Psi\vee(\Theta\vee\Phi))$;
6). $((\Psi\&\Theta)\vee\Phi)\equiv((\Psi\vee\Phi)\&(\Theta\vee\Phi))$;
7). $((\Psi\vee\Theta)\&\Phi)\equiv((\Psi\&\Phi)\vee(\Theta\&\Phi))$;
8). $\neg(\Psi\&\Theta)\equiv(\neg\Psi\vee\neg\Theta)$;
9). $\neg(\Psi\vee\Theta)\equiv(\neg\Psi\&\neg\Theta)$;
10). $\neg\neg\Phi\equiv\Phi$.

Доказательство.

1). Докажем первую секвенцию. Пусть Γ обозначает

$$(\Psi \to \Theta)\ \neg(\neg\Psi \vee \Theta),$$

Λ обозначает $(\Psi \to \Theta)$ и Φ обозначает $\neg(\neg\Psi \vee \Theta)$.

Для доказательства

$$(\Psi \to \Theta) \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)$$

методом от противного достаточно доказать следующие две секвенции. В доказательстве первой секвенции из этих двух самым верхним правилом является удаление импликации.

$$\dfrac{(\Psi \to \Theta)\ \neg(\neg\Psi \vee \Theta) \vdash \Theta}{\dfrac{\Gamma \vdash (\Psi \to \Theta)}{\Lambda \vdash \Lambda \text{ акс}}\text{ут} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Psi}{\dfrac{\neg(\neg\Psi \vee \Theta) \vdash \Psi}{\dfrac{\Phi\ \neg\Psi \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)}{\dfrac{\neg\Psi \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)}{\neg\Psi \vdash \neg\Psi\text{акс}}\vee-\text{вв}}\text{пер ут} \quad \dfrac{\Phi\ \neg\Psi \vdash \Phi}{\Phi \vdash \Phi \text{ акс}}\text{ут}}\neg}\text{пер ут}}$$

$$\dfrac{(\Psi \to \Theta)\ \neg(\neg\Psi \vee \Theta) \vdash \neg\Theta}{\dfrac{\Phi \vdash \neg\Theta}{\dfrac{\Phi\ \neg\neg\Theta \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)}{\dfrac{\neg\neg\Theta \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)}{\neg\neg\Theta \vdash \Theta}\vee-\text{вв}}\text{пер ут} \quad \dfrac{\Phi\ \neg\neg\Theta \vdash \neg(\neg\Psi \vee \Theta)}{\Phi \vdash \Phi \text{ акс}}\text{ут}}\neg}\text{пер ут}$$

Докажем вторую секвенцию. Для доказательства

$$(\neg\Psi \vee \Theta) \vdash (\Psi \to \Theta)$$

воспользуемся правилом удаления импликации. Нужно доказать следующие три секвенции.

$$(\neg\Psi \vee \Theta) \vdash (\neg\Psi \vee \Theta)\ \text{(аксиома)}$$

$$\dfrac{(\neg\Psi \vee \Theta)\ \neg\Psi \vdash (\Psi \to \Theta)}{\dfrac{\neg\Psi \vdash (\Psi \to \Theta)}{\dfrac{\neg\Psi\ \Psi \vdash \Theta}{\neg\Psi\ \Psi\ \neg\Theta \vdash \Psi \quad \neg\Psi\ \Psi\ \neg\Theta \vdash \neg\Psi}\neg}\to-\text{вв}}\text{пер ут}$$

$$\frac{(\neg\Psi \vee \Theta)\ \Theta \vdash (\Psi \to \Theta)}{(\neg\Psi \vee \Theta)\ \Theta\ \Psi \vdash \Theta} \to -\text{вв}$$

Пункты 2)—7), 9) и 10) предоставляется доказать читателю самостоятельно.

8). Докажем первую секвенцию. Пусть Π обозначает $\neg(\neg\Psi \vee \neg\Theta)$ и Λ обозначает $\neg(\Psi \& \Theta)$.

$$\begin{array}{ll}
\Lambda \vdash (\neg\Psi \vee \neg\Theta) & \\ \hline
\Lambda\ \Pi \vdash (\Psi \& \Theta) & \neg \\ \hline
\Pi \vdash (\Psi \& \Theta) & \text{пер ут} \quad \Lambda\ \Pi \vdash \Lambda \\ \hline
\Pi \vdash \Psi & \& - \text{вв} \\ \hline
\Pi\ \neg\Psi \vdash (\neg\Psi \vee \neg\Theta) & \neg \quad \Pi \vdash \Theta \\ \hline
\neg\Psi \vdash (\neg\Psi \vee \neg\Theta) & \text{пер ут} \quad \Pi\ \neg\Psi \vdash \Pi \\ \hline
\neg\Psi \vdash \neg\Psi \ \text{акс} & \vee -\text{вв}
\end{array}$$

Другая секвенция под чертой правила &-введения доказывается аналогично. Эту секвенцию мы доказывать не будем.

Докажем вторую секвенцию. Для доказательства

$$(\neg\Psi \vee \neg\Theta) \vdash \neg(\Psi \& \Theta)$$

применим правило удаления дизъюнкции. Надо будет доказать три секвенции, первая из которых является аксиомой

$$(\neg\Psi \vee \neg\Theta) \vdash (\neg\Psi \vee \neg\Theta),$$

а третья

$$(\neg\Psi \vee \neg\Theta)\ \neg\Theta \vdash \neg(\Psi \& \Theta)$$

доказывается аналогично второй. Докажем только вторую из этих секвенций.

$$\begin{array}{ll}
(\neg\Psi \vee \neg\Theta)\ \neg\Psi \vdash \neg(\Psi \& \Theta) & \\ \hline
\neg\Psi \vdash \neg(\Psi \& \Theta) & \text{пер ут} \\ \hline
\neg\Psi\ \neg\neg(\Psi \& \Theta) \vdash \Psi & \neg \\ \hline
\neg\neg(\Psi \& \Theta) \vdash \Psi & \text{пер ут} \quad \neg\Psi\ \neg\neg(\Psi \& \Theta) \vdash \neg\Psi \\ \hline
\neg\neg(\Psi \& \Theta) \vdash (\Psi \& \Theta) & \& - \text{уд}
\end{array}$$

Лемма доказана. ∎

Будем использовать сокращения: эд — для элементарной дизъюнкции, эк — для элементарной конъюнкции, днф и кнф — для дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм соответственно.

Определение 3.3.3 (элементарной конъюнкции).

а). Каждое высказывание и отрицание каждого высказывания являются эк. Такая эк имеет единственный член, совпадающий с ней самой.

б). Если K_1 и K_2 — эк, то $(K_1 \& K_2)$ — тоже эк.

Члены $(K_1 \& K_2)$ — это члены K_1 и члены K_2.

в). Каждая вещь является эк только в том случае, если это можно доказать, используя пункты а) и б) этого определения.

Определение 3.3.4 (дизъюнктивной нормальной формы).

а). Каждая эк является днф. Она сама является единственным своим членом.

б). Если D_1 и D_2 — днф, то $(D_1 \vee D_2)$ — тоже днф.

Члены $(D_1 \vee D_2)$ — это члены D_1 и члены D_2.

в). Каждая вещь является днф только в том случае,если это можно доказать, используя пункты а) и б) этого определения.

Определение 3.3.5 (элементарной дизъюнкции и кнф). *Заменяя в определении эк & на $\vee$ и эк на эд, получим определение эд. Заменяя в определении днф $\vee$ на &, эк на эд и днф на кнф, получим определение кнф.*

Теорема 3.10 (о существовании кнф). *Для каждой формулы существует эквивалентная ей кнф.*

Доказательство. Индукцией по функциональной сложности формулы. Если функциональная сложность равна 0, то формула есть высказывание и кнф. В общем случае формула имеет вид $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ или $\neg\Phi_1$, где Φ_1 и Φ_2 уже имеют эквивалентные кнф Θ_1 и Θ_2.

Сначала заметим, что

$$(\Phi_1 \to \Phi_2) \equiv (\neg\Phi_1 \vee \Phi_2) \equiv (\neg\Theta_1 \vee \Theta_2),$$

$$(\Phi_1 \vee \Phi_2) \equiv (\Theta_1 \vee \Theta_2),$$

$$(\Phi_1 \& \Phi_2) \equiv (\Theta_1 \& \Theta_2).$$

Последняя формула уже есть кнф. Поэтому достаточно построить эквивалентную кнф для отрицания кнф и для дизъюнкции двух кнф.

Рангом кнф, являющейся эд, назовем число 0. Ранг кнф $(\Psi \& \Theta)$ равен $k_1 + k_2 + 1$, где k_1 — это ранг Ψ, а k_2 — ранг Θ.

Построение кнф, эквивалентной дизъюнкции кнф Ψ и Θ, проведем индукцией по сумме рангов Ψ и Θ. Если эта сумма равна 0, то $(\Psi \vee \Theta)$

есть эд и, значит, кнф. Так как $(\Psi \vee \Theta) \equiv (\Theta \vee \Psi)$, то можно предполагать, что ранг Ψ больше 0. Поэтому $\Psi \equiv (\Pi \& \Delta)$, где Π и Δ — кнф. Теперь

$$(\Psi \vee \Theta) \equiv ((\Pi \& \Delta) \vee \Theta) \equiv ((\Pi \vee \Theta) \& (\Delta \vee \Theta)).$$

Оба конъюнктивных члена стоящей справа конъюнкции имеют меньшую сумму рангов своих дизъюнктивных членов. Поэтому найдутся такие кнф Θ_1 и Θ_2, что $(\Pi \vee \Theta) \equiv \Theta_1$ и $(\Delta \vee \Theta) \equiv \Theta_2$. Следовательно, $(\Psi \vee \Theta)$ эквивалентна кнф $(\Theta_1 \& \Theta_2)$.

Построение кнф, эквивалентной отрицанию кнф Ψ, ведем индукцией по рангу Ψ. Если этот ранг равен 0, то Ψ есть эд. Если Ψ есть $(D_1 \vee D_2)$, а $\neg D_1 \equiv \Theta_1$, $\neg D_2 \equiv \Theta_2$, где Θ_1 и Θ_2 — кнф, то $\neg\Psi$ эквивалентна кнф $(\Theta_1 \& \Theta_2)$. Если же Ψ есть высказывание или отрицание высказывания, то надо использовать лемму 3.9 о булевых эквивалентностях и заметить, что $\neg\neg X \equiv X$.

Если ранг больше 0, то Ψ есть $(\Psi_1 \& \Psi_2)$, где Ψ_1 и Ψ_2 — кнф. Тогда

$$\neg\Psi \equiv (\neg\Psi_1 \vee \neg\Psi_2).$$

Так как ранги Ψ_1 и Ψ_2 меньше ранга Ψ, то найдутся кнф Θ_1 и Θ_2 такие, что $\neg\Psi_1 \equiv \Theta_1$ и $\neg\Psi_2 \equiv \Theta_2$. Осталось использовать уже доказанный факт, что дизъюнкция двух кнф эквивалентна некоторой кнф. ∎

Теорема 3.11 (о существовании днф). *Для каждой формулы существует эквивалентная ей днф.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы. ∎

Приведем пример построения эквивалентных днф и кнф.

Пример 3.3.1.

$$((A \to B) \to (C \to A)) \equiv (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg C \vee A)) \equiv ((A \& \neg B) \vee (\neg C \vee A)) \equiv$$

$$(((A \vee \neg C) \vee A) \& ((\neg B \vee \neg C) \vee A)) \equiv ((A \vee \neg C) \& ((\neg B \vee \neg C) \vee A)).$$

Последняя форма является кнф. Формула

$$((A \& \neg B) \vee (\neg C \vee A))$$

является днф.

Лемма 3.12 (критерий доказуемости кнф).

а). Кнф доказуема тогда и только тогда, когда доказуем каждый ее член.

б). Кнф тождественно истинна тогда и только тогда, когда тождественно истинен каждый ее член.

Доказательство.

б) очевидно.

а). Доказываем индукцией по рангу кнф. Базис индукции очевиден. Пусть рассматриваемая кнф есть $(\Psi\&\Theta)$.

Пусть доказуема $\vdash (\Psi\&\Theta)$. Деревья

$$\frac{\vdash \Psi}{\vdash (\Psi\&\Theta)}\ {\scriptstyle \&-\text{уд}} \qquad \frac{\vdash \Theta}{\vdash (\Psi\&\Theta)}\ {\scriptstyle \&-\text{уд}}$$

доказывают доказуемость $\vdash \Psi$ и $\vdash \Theta$. Наоборот, если эти две секвенции доказуемы, то дерево

$$\frac{\vdash (\Psi\&\Theta)}{\vdash \Psi \qquad \vdash \Theta}\ {\scriptstyle \&-\text{вв}}$$

доказывает доказуемость секвенции $\vdash (\Psi\&\Theta)$. ∎

Лемма 3.13 (критерий доказуемости эд).

а). Эд доказуема тогда и только тогда, когда один из ее членов является отрицанием другого.

б). Эд тождественно истинна тогда и только тогда, когда один из ее членов является отрицанием другого.

в). Эд доказуема тогда и только тогда, когда она тождественно истинна.

Доказательство. Рангом эд является 0, если эта эд есть высказывание или отрицание высказывания. Если же эд есть $(\Psi \vee \Theta)$, то ее ранг — это $k_1 + k_2 + 1$, где k_1 — это ранг Ψ, а k_2 — это ранг Θ.

б). Так как эд истинна при заданных значениях входящих в нее высказываний тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее членов истинен при этих значениях, то если один из членов эд является отрицанием другого, то эта эд тождественно истинна. Пусть ни один из членов эд не является отрицанием другого. Припишем всем членам этой эд значение 0 (другими словами, если высказывание само входит в эту эд, то припишем ему значение 0, а если отрицание высказывания входит в эту эд, то этому высказыванию припишем значение 1). Эта эд тоже примет значение 0 и, значит, она не является тождественно истинной.

а). Если эд доказуема, то она тождественно истинна и, значит, один из ее членов является отрицанием другого. Пусть и X и $\neg X$ являются членами эд. Индукцией по рангу эд Π докажем ее доказуемость. Если этот ранг равен 1, то Π есть или $(X \vee \neg X)$, или $(\neg X \vee X)$. В этом случае $\Pi \equiv (X \vee \neg X)$. По лемме 3.7, Π доказуема одновременно с $(X \vee \neg X)$. Доказуемость же этой последней формулы следует из примера 3.2.3.

Если Π есть $(\Psi \vee \Theta)$ и один из членов Ψ является отрицанием другого, то Ψ доказуема по индукционному предположению. Доказуемость Π получается по правилу $\vee$-введения. Так как

$$(\Psi \vee \Theta) \equiv (\Theta \vee \Psi),$$

то остается случай, когда Π есть $(\Psi \vee \Theta)$, X является членом Ψ, а $\neg X$ является членом Θ.

Индукцией по рангу Ψ докажем,что Ψ есть X или $\Psi \equiv (X \vee \Phi_1)$ для некоторой эд Φ_1. Если Ψ есть $(\Psi_1 \vee \Psi_2)$, то можно считать, что

$$\Psi_1 \equiv (X \vee \Psi_3).$$

Поэтому

$$\Psi \equiv ((X \vee \Psi_3) \vee \Psi_2) \equiv (X \vee (\Psi_3 \vee \Psi_2)).$$

Аналогично, Θ есть $\neg X$ или $\Theta \equiv (\neg X \vee \Phi_2)$. Поэтому

$$\Pi \equiv ((X \vee \Phi_1) \vee (\neg X \vee \Phi_2)) \equiv (((X \vee \Phi_1) \vee \neg X) \vee \Phi_2) \equiv$$

$$((\neg X \vee (X \vee \Phi_1)) \vee \Phi_2) \equiv (((\neg X \vee X) \vee \Phi_1) \vee \Phi_2) \equiv$$

$$(((X \vee \neg X) \vee \Phi_1) \vee \Phi_2) \equiv ((X \vee \neg X) \vee (\Phi_1 \vee \Phi_2)).$$

Итак,

$$\Pi \equiv ((X \vee \neg X) \vee \Phi')$$

и доказуемость Π получается по правилу $\vee$-введения из доказуемости $(X \vee \neg X)$.

а) доказано. в) следует из а) и б). ∎

Теорема 3.14 (о доказуемости истинных секвенций).

Все истинные секвенции доказуемы.

Доказательство. Из леммы 3.6 следует, что можно ограничиться случаем секвенций вида $\vdash \Phi$, где Φ — тождественно истинная формула. Для Φ найдем эквивалентную кнф Ψ (теорема 3.10). По лемме 3.7, Ψ будет тождественно истинной. Значит, все ее члены тоже тождественно истинны (лемма 3.12). По лемме 3.13, каждый член Ψ доказуем. По лемме 3.12, Ψ доказуема. По лемме 3.7, Φ тоже доказуема. Значит, секвенция $\vdash \Phi$ доказуема. ∎

Упражнения к §§3.1—3.3

Упражнение 3.3.1. *Показать, что каждая булева функция определяется формулой, в которой не встречается знак конъюнкции.*

Упражнение 3.3.2. *Показать, что каждая булева функция определяется формулой, в которой не встречается знак дизъюнкции.*

Упражнение 3.3.3. *Показать, что каждая булева функция определяется формулой, в которой не встречается знак импликации.*

Упражнение 3.3.4. *Привести пример булевой функции, каждая формула, определяющая которую, содержит знак отрицания.*

Упражнение 3.3.5. *Сколько булевых функций от трех переменных определяются формулами, не содержащими знака отрицания?*

Упражнение 3.3.6. *Пусть булева функция от трех переменных на наборах 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 соответственно принимает значения 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0. Какой формулой определяется эта функция?*

Упражнение 3.3.7. *Доказать секвенции:*

1)
$$(A \vee B)\ (A \to C)\ (B \to C) \vdash C;$$

2)
$$(C \to A)\ (C \to B) \vdash (C \to (A \& B));$$

3)
$$\vdash (A \to (B \to A));$$

4)
$$\vdash ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)));$$

5)
$$C \vdash (A \vee C);$$

6)
$$C \vdash (C \vee A);$$

7)
$$\vdash ((A \& B) \to A);$$

8)
$$\vdash ((\neg A \to \neg B) \to (B \to A));$$

9)
$$\vdash (A \to (\neg A \to B));$$

Упражнение 3.3.8. *Доказать эквивалентности б) и г) леммы 3.8.*

Упражнение 3.3.9. *Доказать эквивалентности 2)—7), и 9), 10) леммы 3.9.*

Упражнение 3.3.10 (*). *Пусть ни одна из формул* $\neg\Phi$ *и* Ψ *не является доказуемой. Доказать следующую интерполяционную теорему:*

если секвенция $\vdash (\Phi \to \Psi)$ *доказуема, то найдется такая формула* Ψ_1*, что каждое высказывание, входящее в* Ψ_1*, входит одновременно и в* Φ*, и в* Ψ*, а обе секвенции* $\vdash (\Phi \to \Psi_1)$ *и* $\vdash (\Psi_1 \to \Psi)$ *доказуемы.*

Упражнение 3.3.11. *Для формул*

1)
$$\neg(((A\&\neg B) \vee C) \vee (A\&\neg C)),$$

2)
$$\neg((A \to B) \vee (C\&\neg A)),$$

3)
$$\neg(A \to (A \to (B\&C)))$$

найти такие эквивалентные формулы, у которых знаки отрицания расположены только непосредственно перед высказываниями, и доказать эти эквивалентности.

Упражнение 3.3.12. *Для формул из упражнения 3.3.11 построить эквивалентные им кнф и днф.*

Упражнение 3.3.13. *Определите, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны и объясните, почему это так:*

а) если некоторая формула не является доказуемой, то доказуемо отрицание этой формулы;

б) если отрицание формулы доказуемо, то сама эта формула не является доказуемой;

в) если доказуема дизъюнкция двух формул, то одна из этих формул доказуема;

г) если одна из двух формул доказуема, то доказуема и дизъюнкция этих двух формул.

Упражнение 3.3.14. *Пусть* Φ *— некоторая формула, не содержащая других высказываний, кроме* $A_1, \ldots, A_m$*. Пусть* $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ *— некоторые формулы. Определим формулу* Θ*, полученную из* Φ *одновременной подстановкой* $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ *вместо* $A_1, \ldots, A_m$*. Если* Φ *есть* A_i*, то* Θ *есть* Ψ_i*. Если* Φ *есть* $\neg\Phi_1$ *и* Θ_1 *получается из* Φ_1 *одновременной* *подстановкой $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ вместо $A_1, \dots, A_m$, то Θ есть $\neg\Theta_1$. Если Φ есть $(\Phi_1 \Diamond \Phi_2)$, где $\Diamond$ — это один из знаков конъюнкции, дизъюнкции или импликации, а для $j = 1$ и $j = 2$ Θ_j из Φ_j получается одновременной подстановкой $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ вместо $A_1, \dots, A_m$, то Θ есть $(\Theta_1 \Diamond \Theta_2)$. Пусть для $j = 1, \dots, s+1$ Φ_j не содержит других высказываний, кроме $A_1, \dots, A_m$, и Θ_j получается из Φ_j одновременной подстановкой $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ вместо $A_1, \dots, A_m$. Если секвенция*

$$\Phi_1 \dots \Phi_s \vdash \Phi_{s+1}$$

доказуема, то секвенция

$$\Theta_1 \dots \Theta_s \vdash \Theta_{s+1}$$

тоже доказуема. Доказать это.

Упражнение 3.3.15. *Рассмотрим некоторую недоказуемую формулу. Пусть эта формула Φ содержит высказывания $A_1, \dots, A_m$ и не содержит других высказываний. Мы скажем, что добавим секвенцию $\vdash \Phi$ к аксиомам исчисления высказываний в качестве дополнительной схемы аксиом, если аксиомами исчисления высказываний, кроме аксиом вида $\Psi \vdash \Psi$, где Ψ — произвольная формула, будем также полагать все секвенции вида $\vdash \Theta$, где Θ — это формула, полученная из формулы Φ одновременной подстановкой вместо высказываний $A_1, \dots, A_m$ формул $\Psi_1, \dots, \Psi_m$ (определение одновременной подстановки содержится в предыдущем упражнении. Добавим секвенцию $\vdash \Phi$ к аксиомам исчисления высказываний в качестве дополнительной схемы аксиом, не меняя при этом ни правил вывода, ни определения доказательства (доказательством по-прежнему называется конечная последовательность секвенций, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих секвенций этой же последовательности по какому-то правилу вывода). Доказать, что в полученном исчислении доказуема любая секвенция.*

Например, если Φ — это $(A \to B)$, то аксиомами нового исчисления будут все секвенции видов $\vdash (\Psi \to \Theta)$, $\Psi \vdash \Psi$, где Ψ и Θ — это формулы.

В частности, доказать, что в этом исчислении доказуема любая секвенция.

3.4 Алгебраические системы

Мы, конечно, прежде всего должны фиксировать предметную область, свойства которой мы намерены изучать. Эта область должна представлять собой непустое множество вместе с заданными на этом множестве операциями и отношениями. Эти заданные операции и отношения называются основными.

Чтобы иметь возможность записывать изучаемые свойства, потребуются обозначения или, другими словами, имена для заданных основных операций и отношений. Например, в арифметике предметная область — это множество ω натуральных чисел, основные операции — это безаргументные операции, выделяющие 0 и 1, а также операции сложения и умножения, основное отношение — это отношение порядка. В элементарной геометрии операций обычно не рассматривают, а основные отношения — это отношения равенства, принадлежности, быть точкой, быть прямой, быть плоскостью и другие.

Уже из этих примеров можно увидеть, что операции и отношения бывают от разного числа аргументов (как говорят, разной местности). Например, операции сложения и умножения двухместны (имеют два аргумента), а отношение быть точкой — от одного аргумента. Многие используют вместо термина отношение термин предикат.

Что же такое операция на множестве A от n аргументов? Это — отображение, которое каждой последовательности длины n, составленной из элементов множества A, ставит в соответствие однозначно определенный элемент множества A. Например, операция сложения натуральных чисел имеет два аргумента и каждой паре натуральных чисел ставит в соответствие их сумму. Сумма определяется однозначно для каждой пары натуральных чисел, но различные пары могут иметь разные суммы.

Обозначим через A^n множество всех последовательностей длины n, составленных из элементов множества A.

Отношение от n аргументов на множестве A — это отображение, которое каждой последовательности длины n, составленной из элементов множества A, ставит в соответствие 0 или 1. На тех последовательностях, которым поставлена в соответствие 1, это отношение истинно, а на остальных оно ложно. Если собрать те последовательности, на которых рассматриваемое отношение истинно, то получим некоторое подмножество множества A^n.

Определение 3.4.1. *Сигнатурой называется набор символов операций и отношений вместе с отображением, которое каждому символу приписывает натуральное число — число аргументных мест или местность этого символа.*

Определение 3.4.2. *Алгебраической системой (иногда говорят так-*

же, структурой или еще интерпретацией) сигнатуры Ω называется непустое множество вместе с отображением, которое каждому символу отношения из этой сигнатуры Ω ставит в соответствие отношение той же местности на этом множестве, а каждому символу операции из сигнатуры Ω ставит в соответствие операцию той же местности на этом же множестве. Это фиксированное непустое множество называется обычно основным множеством рассматриваемой алгебраической системы.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.4.1.

Пусть основное множество является объединением следующих подмножеств:

1) фамилий преподавателей {Ершов, Мерзляков, Лавров, Мазуров};
2) названий предметов {алгебра, логика};
3) номеров аудиторий { 201, 202, 203, 204};
4) дат в январе { 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11};
5) шифров групп { M1, M2, M3, M4}.

Пусть сигнатура Ω_1 состоит из символов четырехместного отношения R и трехместного отношения P.

Рассмотрим алгебраическую систему A_1 сигнатуры Ω_1 с указанным выше основным множеством, в которой P и R интерпретируются следующим образом. Отношение P для каждой группы и каждого предмета указывает экзаменатора в этой группе по этому предмету и состоит из троек

$$\langle M1, \text{алгебра}, \text{Мерзляков}\rangle, \quad \langle M1, \text{логика}, \text{Ершов}\rangle,$$
$$\langle M2, \text{алгебра}, \text{Мерзляков}\rangle, \quad \langle M2, \text{логика}, \text{Ершов}\rangle,$$
$$\langle M3, \text{алгебра}, \text{Мазуров}\rangle, \quad \langle M3, \text{логика}, \text{Лавров}\rangle,$$
$$\langle M4, \text{алгебра}, \text{Мазуров}\rangle, \quad \langle M4, \text{логика}, \text{Лавров}\rangle.$$

Отношение R для каждой группы и предмета указывает дату и аудиторию экзамена по этому предмету в этой группе и состоит из четверок

$$\langle M1, \text{алгебра}, 3, 201\rangle, \quad \langle M1, \text{логика}, 9, 201\rangle,$$
$$\langle M2, \text{алгебра}, 9, 202\rangle, \quad \langle M2, \text{логика}, 3, 202\rangle,$$
$$\langle M3, \text{алгебра}, 5, 203\rangle, \quad \langle M3, \text{логика}, 11, 204\rangle,$$
$$\langle M4, \text{алгебра}, 9, 203\rangle, \quad \langle M4, \text{логика}, 3, 203\rangle.$$

Алгебраическая система A_1 описывает расписание экзаменов в рассматриваемых группах.

Пример 3.4.2.

Расписание экзаменов в тех же группах можно задать и по-другому, рассматривая сигнатуру Ω_2, состоящую из символа пятиместного отношения Q, и такую алгебраическую систему A_2 сигнатуры Ω_2, что основное множество системы A_2 совпадает с основным множеством системы A_1, а отношение Q в A_2 состоит из пятерок:

$$\langle M1, \text{алгебра}, \text{Мерзляков}, 3, 201\rangle, \quad \langle M1, \text{логика}, \text{Ершов}, 9, 201\rangle,$$

$$\langle M2, \text{алгебра}, \text{Мерзляков}, 9, 202\rangle, \quad \langle M2, \text{логика}, \text{Ершов}, 3, 202\rangle,$$

$$\langle M3, \text{алгебра}, \text{Мазуров}, 5, 203\rangle, \quad \langle M3, \text{логика}, \text{Лавров}, 11, 204\rangle,$$

$$\langle M4, \text{алгебра}, \text{Мазуров}, 9, 203\rangle, \quad \langle M4, \text{логика}, \text{Лавров}, 3, 203\rangle.$$

В пятерке идут шифр группы, название предмета, фамилия преподавателя, дата экзамена, аудитория.

Пример 3.4.3.

Допустим, что на курсе не более 30 групп, в каждой группе не более 30 экзаменов и 30 студентов, которые как-то пронумерованы, например, в алфавитном порядке своих фамилий. Рассмотрим сигнатуру Ω_3, состоящую из одной трехместной операции f. Рассмотрим алгебраическую систему A_3 сигнатуры Ω_3, основное множество которой — это множество $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 30\}$, а операция f задана следующим образом:

$f(i, j, k)$ — это оценка студента номера j в группе номера i по экзамену номера k, если же i не есть номер группы, или j не есть номер студента в группе номера i, или k не есть номер экзамена в группе номера i, то $f(i, j, k) = 0$.

Понятно, что A_3 описывает результаты экзаменационной сессии на курсе.

3.5 Термы и формулы

Кроме основных, приходится рассматривать и более сложные операции, получаемые из основных суперпозициями. Удобно иметь обозначения и для этих более сложных операций. Например, в арифметике обычно рассматривают многочлены, представляющие собой суперпозиции 0, 1, сложения и умножения.

Обозначения для суперпозиций основных операций называют термами.

В термах используются предметные переменные — переменные, принимающие значения из основного множества рассматриваемой алгебраической системы. Мы будем обозначать предметные переменные строчными латинскими буквами x, y, z с индексами.

Определение 3.5.1 (терма).

а). Каждая предметная переменная и каждый нульместный символ операции сигнатуры Ω — терм сигнатуры Ω. В предметную переменную входит она сама, а другие переменные не входят. В символ операции предметные переменные не входят.

б). Если f — n-местный символ операции сигнатуры Ω, а $t_1, \dots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, то $f(t_1, \dots, t_n)$ — тоже терм сигнатуры Ω. Переменная входит в $f(t_1, \dots, t_n)$ тогда и только тогда, когда она входит хотя бы в один из термов $t_1, \dots, t_n$.

в). Каждая вещь является термом сигнатуры Ω только если это можно доказать, используя пункты а) и б).

г). Терм, не содержащий переменных, называется замкнутым.

Обычно при двухместном f вместо $f(t_1, t_2)$ еще пишут $(t_1 f t_2)$. Например, пишут $(x_1 + x_2)$ вместо $+(x_1, x_2)$. Например, $((x_1 + x_2) * x_3)$ — арифметический терм, в котором $+$ и $*$ — символы двухместных операций сложения и умножения.

Заметим, что если сигнатура не содержит символов операций, то каждый терм является просто предметной переменной, так как в этом случае пункт б) определения нельзя использовать.

Определение 3.5.2 (состояния). *Состоянием (или оценкой) алгебраической системы называется отображение, которое каждой предметной переменной ставит в соответствие некоторый элемент основного множества этой системы.*

Определение 3.5.3 (значения терма на состоянии).

Пусть σ — состояние алгебраической системы A сигнатуры Ω.

а). Если x — предметная переменная, то $\sigma(\ x)$ задано по определению σ.

б). Если f — нульместный символ операции сигнатуры Ω, f^A — безаргументная операция, поставленная в соответствие символу f в алгебраической системе A, то $\sigma(f)$ есть значение f^A.

в). Если f — n-местный символ операции сигнатуры Ω, f^A — операция, соответствующая символу f в алгебраической системе A, а $t_1, \dots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, то $\sigma(f(t_1, \dots, t_n))$ есть

$$f^A(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)).$$

Элемент $\sigma(t)$ *называется значением терма* t *на состоянии* σ.

Например, если $\sigma(x_1)=1, \sigma(x_2)=2, \sigma(x_3)=7$, то $\sigma(((x_1+x_2)*x_3))=21$.

Действительно,

$$\sigma((x_1+x_2))=\sigma(x_1)+\sigma(x_2)=1+2=3,$$

$$\sigma(((x_1+x_2)*x_3))=\sigma((x_1+x_2))*\sigma(x_3)=3*7=21.$$

Определение 3.5.4 (равенства термов). *Два терма* t_1 *и* t_2 *сигнатуры* Ω *равны в алгебраической системе* A *сигнатуры* Ω, *если они имеют одинаковые значения на каждом состоянии этой системы* A.

Для записи свойств элементов алгебраической системы используют формулы.

Определение 3.5.5 (атомной формулы).

а). Если t_1, t_2 *— термы сигнатуры* Ω, *то* $t_1=t_2$ *— атомная формула сигнатуры* Ω. *В* $t_1=t_2$ *входят те и только те переменные, которые входят в* t_1 *или в* t_2.

б). Если P *— нульместный символ отношения сигнатуры* Ω, *то* P *— атомная формула сигнатуры* Ω, *в которую никакие предметные переменные не входят.*

в). Если P *—* n*-местный символ отношения сигнатуры* Ω, *а*

$$t_1,\ldots,t_n\ -$$

термы сигнатуры Ω, *то*

$$P(t_1,\ldots,t_n)\ -$$

атомная формула сигнатуры Ω. *В эту формулу входят те и только те переменные, которые входят хотя бы в один из термов* $t_1,\ldots,t_n$.

Определение 3.5.6 (формулы логики предикатов).

а). Атомная формула сигнатуры Ω *является формулой сигнатуры* Ω. *Все переменные, входящие в атомную формулу, входят в нее свободно.*

б). Если Φ, Ψ *— формулы сигнатуры* Ω, *то* $\neg\Phi$, $(\Phi\vee\Psi)$, $(\Phi\&\Psi)$, $(\Phi\to\Psi)$ *— тоже формулы сигнатуры* Ω. *Переменная входит свободно (связанно) в* $\neg\Phi$ *тогда и только тогда, когда эта переменная входит свободно (соответственно, связанно) в* Φ. *Переменная входит свободно (связанно) в* $(\Phi\vee\Psi)$, $(\Phi\&\Psi)$, $(\Phi\to\Psi)$ *тогда и только тогда, когда* *эта переменная входит свободно (соответственно, связанно) в одну из формул Φ или Ψ.*

в). Если Φ — формула сигнатуры Ω, x — переменная, то $(\forall x)\Phi$ и $(\exists x)\Phi$ — тоже формулы сигнатуры Ω. Переменная x входит в обе эти формулы связно и не входит свободно. Отличная от x переменная входит в $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$ свободно (связанно) тогда и только тогда, когда эта переменная входит свободно (соответственно, связанно) в Φ.

г). Каждая вещь является формулой сигнатуры Ω, только если это можно доказать, используя а), б), в).

д). Формула, в которую никакая переменная не входит свободно, называется замкнутой.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.5.1.

Рассмотрим сигнатуру Ω_1, описанную в примере 3.4.1. Выражение

$$(\forall z)(\forall x)(\forall y)(((\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1)\&(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \to (\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \quad (7)$$

является формулой сигнатуры Ω_1 содержащей связанно x, y, z, x_1, y_1, x_2, y_2 и не содержащей свободных переменных.

Действительно, $R(x,z,x_1,y_1)$ и $R(y,z,x_2,y_2)$ — атомные формулы, поэтому

$$(\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1),$$

$$(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2),$$

$$(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)$$

являются формулами, в которые x, z — в первую, y, z — во вторую, y — в третью входят свободно, а x_1, y_1 — в первую формулу, x_2, y_2 — во вторую и z, x_2, y_2 — в третью входят связанно (пункт в) определения 3.5.6). Поэтому

$$((\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1)\&(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2))$$

содержит x, y, z свободно, а z, x_1, y_1, x_2, y_2 связанно (пункт б) определения 3.5.6). Окончательно, в формулу 7 никакая переменная не входит свободно, а x, y, z, x_1, y_1, x_2, y_2 входят связанно (пункт в)).

Пример 3.5.2.

Рассмотрим сигнатуру Ω_2, описанную в примере 3.4.2. Выражение

$$(\forall x)((\exists y_1)(\exists z_1)(\exists x_1)Q(y_1, z_1, x_3, x_1, x) \\ \to (\exists y_2)(\exists z_2)(\exists x_2)Q(y_2, z_2, x_4, x_2, x)) \quad (8)$$

является формулой сигнатуры Ω_2, в которую x, y_1, z_1, x_1, y_2, z_2, x_2 входят связанно, а x_3 и x_4 входят свободно.

Пример 3.5.3.

Рассмотрим снова сигнатуру Ω_2, описанную в примере 3.4.2. Выражение

$$((\exists x_1)(\exists y_1)(\exists z_1)Q(x_3, x_1, y, y_1, z_1)\& \\ (\exists x_2)(\exists y_2)(\exists z_2)Q(x_1, x_2, y, y_2, z_2)) \quad (9)$$

является формулой сигнатуры Ω_2, в которую x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 входят связанно, а x_3, y ,x_1 входят свободно. Из этого примера видно, что одна и та же переменная может входить в рассматриваемую формулу и свободно, и связанно.

Символы $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$ обычно называют (пропозициональными) связками, а $\forall$ и $\exists$ — знаками кванторов. При этом $\forall$ — знак квантора общности, а $\exists$ — знак квантора существования. Если x — переменная, то выражения $(\forall x)$, $(\exists x)$ — кванторы общности и существования, соответственно, по переменной x.

В формулах $(\forall x)\Phi$ и $(\exists x)\Phi$ формула Φ называется областью действия квантора $(\forall x)$ или $(\exists x)$. Грубо говоря, связанное вхождение переменной — это вхождение в область действия квантора по той же переменной.

Определение 3.5.7 (сложности формулы).

а). Сложность атомной формулы равна 0.

б). Сложность каждой из формул $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \& \Psi)$, $(\Phi \to \Psi)$ равна увеличенной на 1 сумме сложностей формул Φ и Ψ.

в). Сложность каждой из формул $\neg\Phi$, $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$ равна увеличенной на 1 сложности формулы Φ.

Грубо говоря, сложность формулы — это число вхождений символов кванторов и связок в эту формулу.

Определение 3.5.8 (значения формулы).

Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Ω, Φ — формула сигнатуры Ω, σ — состояние системы A.

а). Если Φ есть $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы сигнатуры Ω, то $\sigma(\Phi) = 1$, если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, и $\sigma(\Phi) = 0$, если $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$.

б). Пусть Φ_1 есть P, P — нульместный символ отношения из сигнатуры Ω и P^A — отношение, поставленное в соответствие символу P в системе A. Тогда $\sigma(P)$ есть P^A.

в). Пусть Φ есть $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P — n-местный символ отношения из сигнатуры Ω, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы сигнатуры Ω, P^A — отношение, поставленное в соответствие символу P в системе A. Тогда $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1$, если

$$\langle \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n) \rangle \in P^A,$$

и $\sigma(P(t_1, \ldots, t_n) = 0$, если

$$\langle \sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n) \rangle \notin P^A.$$

г). Если Φ есть одна из формул $\neg\Phi_1$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, то $\sigma(\Phi)$ определяется через $\sigma(\Phi_1)$ и $\sigma(\Phi_2)$ по правилам, указанным в следующих таблицах.

Φ_1	$\neg\Phi_1$
0	1
1	0

Φ_1	Φ_2	$(\Phi_1 \& \Phi_2)$	$(\Phi_1 \vee \Phi_2)$	$(\Phi_1 \to \Phi_2)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

д). Если Φ есть $(\exists x)\Phi_1$, то $\sigma(\Phi) = 1$, если существует такое состояние σ_1 системы A, что $\sigma_1(y) = \sigma(y)$ для каждой отличной от x переменной y и $\sigma_1(\Phi_1) = 1$, и $\sigma(\Phi) = 0$ в остальных случаях.

е). Если Φ есть $(\forall x)\Phi_1$, то $\sigma(\Phi) = 1$, если $\sigma_1(\Phi_1) = 1$ для каждого такого состояния σ_1 системы A, что $\sigma_1(y) = \sigma(y)$ для каждой отличной от x переменной y, и $\sigma(\Phi) = 0$ в остальных случаях.

Если $\sigma(\Phi) = 1$, то говорят, что Φ истинна на σ и пишут $\sigma \models \Phi$. Если $\sigma(\Phi) = 0$, то говорят, что Φ ложна на σ. Если Φ истинна на каждом состоянии системы A, то говорят, что Φ истинна в A (или на A), и пишут $A \models \Phi$.

Если Φ истинна в каждой алгебраической системе сигнатуры Ω, то говорят, что Φ тождественно истинна.

Легко заметить, что

$$\sigma((\forall x)\Phi) = \sigma(\neg(\exists x)\neg\Phi),$$

$$\sigma((\exists x)\Phi) = \sigma(\neg(\forall x)\neg\Phi)$$

для каждой формулы Φ и каждого состояния σ.

Приведем несколько примеров.

Пример 3.5.4.

Рассмотрим формулу (7) и алгебраическую систему A_1, описанную в примере 3.4.1. Как эта формула, так и система A_1 имеют сигнатуру Ω_1, описанную в том же примере. Формула (7) имеет вид $(\forall z)(\forall x)(\forall y)\Phi$.

Формула (7) истинна в A_1. Действительно, рассмотрим произвольное состояние σ системы A. Если

$$\sigma \models \neg(\exists x_1)(\exists y_1)R(x, z, x_1, y_1),$$

то формула Φ тоже истинна на σ. Пусть

$$\sigma \models (\exists x_1)(\exists y_1)R(x, z, x_1, y_1).$$

Тогда $\sigma(x)$ является шифром группы, а $\sigma(z)$ — названием такого предмета, что в некоторое число в некоторой аудитории проводится экзамен по предмету $\sigma(z)$ в группе $\sigma(x)$. Если

$$\sigma \models \neg(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y, z, x_2, y_2),$$

то формула Φ истинна на σ. Пусть

$$\sigma \models (\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y, z, x_2, y_2).$$

Из определения A_1 легко усмотреть, что тогда $\sigma(y)$ является шифром группы. Кроме того, если в группе $\sigma(x)$ проводится экзамен по предмету $\sigma(z)$, то и в любой другой группе, в частности, в группе $\sigma(y)$ тоже проводится экзамен по предмету $\sigma(z)$. Значит, существует такое состояние σ_1 системы A_1, что $\sigma_1(y) = \sigma(y)$, $\sigma_1(z) = \sigma(z)$ и $\sigma_1 \models R(y, z, x_2, y_2)$. Поэтому

$$\sigma \models (\exists x_2)(\exists y_2)R(y, z, x_2, y_2).$$

Это говорит о том, что $\sigma \models \Phi$. Из произвольности σ следует, что

$$A_1 \models (\forall z)(\forall x)(\forall y)\Phi.$$

Значит, формула (7) истинна в A_1.

Пример 3.5.5.

Пусть σ — такое состояние системы A_2 сигнатуры Ω_2 из примера 3.4.2, что $\sigma(x_3)$ есть Мерзляков, а $\sigma(x_4)$ есть Мазуров. Покажем, что формула (8) ложна на σ. Пусть σ_1 — любое такое состояние системы A_2, что $\sigma_1(x_3) =$ Мерзляков, $\sigma_1(x_4) =$ Мазуров, $\sigma_1(x) = 201$, $\sigma_1(y_1) = M1$, $\sigma_1(z_1) =$ алгебра, $\sigma_1(x_1) = 3$. Тогда

$$\sigma_1 \models Q(y_1, z_1, x_3, x_1, x).$$

Однако, если σ_2 — такое состояние системы A_2, что $\sigma_2(x_4) =$ Мазуров, $\sigma_2(x) = 201$, то

$$\sigma_2 \models \neg Q(y_2, z_2, x_4, x_2, x),$$

так как Мазуров не экзаменует в аудитории 201. Поэтому формула (8) ложна на σ.

С другой стороны, если σ' — такое состояние системы A_2, что $\sigma'(x_3) =$ Мерзляков, $\sigma'(x_4) =$ Ершов, то (8) истинна на σ'.

Таким образом, истинность (8) на состоянии σ_3 системы A_2 зависит от σ_3. Для одних состояний (8) истинна, для других — ложна.

Грубо говоря, (8) говорит о том, что экзаменаторы x_3 и x_4 экзаменуют в одних и тех же аудиториях.

Пример 3.5.6.

Рассмотрим еще раз ту же систему A_2 сигнатуры Ω_2, но теперь вместе с формулой (9). Пусть σ — состояние системы A_2. Формула (9) говорит о том, что y является общим экзаменатором в группах x_3 и x_1. Поэтому если $\sigma(x_3) = M1$, $\sigma(x_1) = M2$ и $\sigma(y) =$ Ершов, то (9) истинна на σ. Однако, если $\sigma(x_3) = M1$, $\sigma(x_1) = M2$ и $\sigma(y) =$ Лавров, то (9) ложна на σ. Формула (9) ложна также на всех таких состояниях σ системы A_2, что $\sigma(x_1) = M1$, $\sigma(x_3) = M3$, так как в группах $M1$ и $M3$ нет общих экзаменаторов.

Определение 3.5.9 (результата подстановки).

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы.

a). Если x отлична от каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, то

$$(x)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть x.

б). Если $i \in \{1, \ldots, n\}$, то

$$(x_i)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть t_i.

в). Если f — нульместный символ операции, то $(f)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ есть f.

г). Если f — n-местный символ операции, а $t'_1, \ldots, t'_m$ — термы, то

$$(f(t'_1, \ldots, t'_m))^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$f((t'_1)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}, \ldots, (t'_m)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}).$$

д). Для любых термов r и s

$$(r = s)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$(r)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (s)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

е). Если P — нульместный символ отношения, то

$$(P)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть P.

ж). Если P — m-местный символ отношения, а $r_1, \ldots, r_m$ — термы, то

$$(P(r_1, \ldots, r_m))^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$P((r_1)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}, \ldots, (r_m)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}).$$

з). Для любых формул Φ и Ψ и для любой связки $\Diamond \in \{\&, \vee, \to\}$

$$((\Phi \Diamond \Psi))^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$((\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \Diamond (\Psi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}).$$

и). Для любой формулы Φ

$$(\neg\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$\neg(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

к). Если $i \in \{1, \ldots, n\}$, x — такая переменная, отличная от $x_1, \ldots, x_n$, что x входит в t_i, а x_i входит свободно в формулу Φ и $Q \in \{\forall,\ \exists\}$, то

$$((Qx)\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

не определено.

л). Если $Q \in \{\forall,\ \exists\}$, x — переменная, отличная от $x_1, \ldots, x_n$, и для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$ либо x не входит в t_i, либо x_i не входит свободно в формулу Φ, то

$$((Qx)\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$(Qx)(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

м). Если $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Q \in \{\forall\ ,\exists\}$, то

$$((Qx_i)\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$$

есть

$$((Qx)\Phi)^{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n}.$$

Грубо говоря, одновременная подстановка термов

$$t_1, \ldots, t_n$$

вместо свободных вхождений попарно различных переменных

$$x_1, \ldots, x_n$$

в формуле Φ возможна только в случае, если ни для какого $i \in \{1, \ldots, n\}$ ни одно свободное вхождение x_i не лежит в области действия квантора по переменной, входящей в t_i. Результат этой подстановки, если она возможна, обозначается через

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Лемма 3.15. *Если A — алгебраическая система сигнатуры Ω; σ — состояние системы A; z — переменная; s, r, t — термы сигнатуры Ω; $\sigma(s) = \sigma(r)$, то*

$$\sigma((t)^z_s) = \sigma((t)^z_r).$$

Доказательство. Индукцией по числу символов операций в терме t.

Базис индукции. Терм t есть переменная или символ нульместной операции. Если переменная отлична от z, то $(t)^z_s$ и $(t)^z_r$ совпадают с t.

Если переменная есть z, то $(t)^z_s$ есть s, $(t)^z_r$ есть r и $\sigma((t)^z_s) = \sigma(s) = \sigma(r) = \sigma((t)^z_r)$.

Если t есть символ нульместной операции, то $(t)^z_s$ и $(t)^z_r$ совпадают с t.

Индукционный шаг. Пусть t есть $f(t_1, \ldots, t_n)$ и

$$\sigma((t_i)^z_s) = \sigma((t_i)^z_r)$$

для $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда

$$\sigma((t)^z_s) = f^A(\sigma((t_1)^z_s, \ldots, \sigma((t_n)^z_s) = f^A(\sigma((t_1)^z_r, \ldots, \sigma((t_n)^z_r) = \sigma((t)^z_r).$$

■

Лемма 3.16. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Ω; Φ — формула сигнатуры Ω; r, s — термы сигнатуры Ω; z — переменная; $(\Phi)^z_s$ и $(\Phi)^z_r$ определены; σ — состояние системы A; $\sigma(s) = \sigma(r)$. Тогда $\sigma((\Phi)^z_s) = \sigma((\Phi)^z_r)$.*

Доказательство. Индукцией по сложности формулы.

Базис индукции. Сложность равна 0. Φ — атомная формула.

Случай 1. Φ есть нульместный символ отношения. Тогда $(\Phi)^z_s$ и $(\Phi)^z_r$ есть Φ.

Случай 2. Φ есть $t_1 = t_2$. Тогда $(\Phi)^z_s$ есть

$$(t_1)^z_s = (t_2)^z_s,$$

а $(\Phi)^z_r$ есть

$$(t_1)^z_r = (t_2)^z_r.$$

Так как

$$\sigma((t_1)^z_s) = \sigma((t_1)^z_r), \quad \sigma((t_2)^z_s) = \sigma((t_2)^z_r),$$

то $\sigma((\Phi)^z_s) = \sigma((\Phi)^z_r)$.

Случай 3. Φ есть $P(t_1, \ldots, t_n)$. Рассматривается аналогично:

$$\sigma((\Phi)^z_s) = 1 \iff \langle \sigma((t_1)^z_s), \ldots, \sigma((t_n)^z_s) \rangle \in P^A \iff$$

$$\langle \sigma((t_1)^z_r), \ldots, \sigma((t_n)^z_r) \rangle \in P^A \iff \sigma((\Phi)^z_r) = 1.$$

Индукционный шаг. Φ есть либо $\neg\Phi_1$, либо $(\Phi_1 \diamondsuit \Phi_2)$, где

$$\diamondsuit \in \{\&, \vee, \rightarrow\},$$

либо $(\exists x_1)\Phi_1$, либо $(\forall x_1)\Phi_1$, а для формул Φ_1 и Φ_2 лемма уже доказана.

Случай 1.

$$\sigma((\neg\Phi_1)^z_s) = 1 - \sigma((\Phi_1)^z_s) = 1 - \sigma((\Phi_1)^z_r) = \sigma(\neg(\Phi_1)^z_r).$$

Случай 2.

$$\sigma((\Phi_1 \diamondsuit \Phi_2)^z_s) = \sigma(((\Phi_1)^z_s \diamondsuit (\Phi_2)^z_s)) = \sigma((\Phi_1)^z_s) \diamondsuit \sigma((\Phi_2)^z_s) =$$

$$\sigma((\Phi_1)^z_r) \diamondsuit \sigma((\Phi_2)^z_r) = \sigma((\Phi_1 \diamondsuit \Phi_2)^z_r).$$

Случай 3. Если x_1 отлично от z и z входит свободно в Φ_1, то

$$\sigma(((\exists x_1)\Phi_1)^z_s) = \sigma((\exists x_1)(\Phi_1)^z_s) = \sigma((\exists x_1)(\Phi_1)^z_r) = \sigma(((\exists x_1)\Phi_1)^z_r),$$

так как из определенности $(\Phi)^z_s$ и $(\Phi)^z_r$ следует, что все переменные, входящие в r, s, отличны от x_1. Действительно, истинность $(\exists x_1)(\Phi)^z_s$ на σ равносильна существованию такого состояния σ_1 системы A, что $\sigma_1(x') = \sigma(x')$ для всех переменных x', отличных от x_1, и

$$\sigma_1 \models (\Phi_1)^z_s.$$

. Так как

$$\sigma_1(s) = \sigma(s) = \sigma(r) = \sigma_1(r),$$

то

$$\sigma_1 \models (\Phi_1)^z_r.$$

Значит,

$$\sigma \models (\exists x_1)(\Phi_1)^z_r.$$

Если же x_1 есть z или z не входит свободно в Φ_1, то $((\exists x_1)\Phi_1)^z_s$ есть $(\exists x_1)\Phi_1$ и $((\exists x_1)\Phi_1)^z_r$ есть $(\exists x_1)\Phi_1$.

Случай 4.

$$\sigma(((\forall x_1)\Phi_1)^z_s) = \sigma(\neg((\exists x_1)\neg\Phi_1)^z_s) = \sigma(\neg((\exists x_1)\neg\Phi_1)^z_r) = \sigma(((\forall x_1)\Phi_1)^z_r).$$

$\blacksquare$

Лемма 3.17. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Ω, Φ — формула сигнатуры Ω, t — терм сигнатуры Ω, не содержащий переменной x, σ и σ_1 — такие состояния системы A, что $\sigma_1(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от x, и $(\Phi)^x_t$ определено. Тогда $\sigma_1((\Phi)^x_t) = \sigma((\Phi)^x_t)$.*

Доказательство. Индукцией по сложности Φ. Из определений следует, что $\sigma(s) = \sigma_1(s)$ для всех термов s, не содержащих x.

Базис. Φ — атомная. Если Φ — нульместный символ отношения, то

$$\sigma_1((\Phi)_t^x) = \sigma((\Phi)_t^x) = \Phi^A.$$

Если Φ есть $t_1 = t_2$, то

$$\sigma_1((\Phi)_t^x) = 1 \iff \sigma_1((t_1)_t^x) = \sigma_1((t_2)_t^x) \iff$$
$$\sigma((t_1)_t^x) = \sigma((t_2)_t^x) \iff \sigma((\Phi)_t^x) = 1,$$

так как

$$\sigma_1((t_1)_t^x) = \sigma((t_1)_t^x), \quad \sigma_1((t_2)_t^x) = \sigma((t_2)_t^x),$$

ибо $(t_1)_t^x$ и $(t_2)_t^x$ не содержат x.

Случай, когда Φ есть $P(t_1, \dots, t_n)$, рассматривается аналогично.

Индукционный шаг. Φ есть либо $\neg\Phi_1$, либо $(\Phi_1 \Diamond \Phi_2)$, где

$$\Diamond \in \{\&, \vee, \to\},$$

либо $(Qx_1)\Phi_1$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, а для формул меньшей сложности лемма уже доказана.

В первых двух случаях истинностное значение Φ вычисляется через истинностные значения Φ_1 и Φ_2. Рассмотрим третий случай. Пусть Q есть $\exists$.

Если x_1 есть x, то $((\exists x_1)\Phi_1)_t^x$ есть $(\exists x)\Phi_1$. Истинность $(\exists x)\Phi_1$ на σ равносильна существованию такого состояния σ' системы A, что $\sigma'(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от x, и на σ' истинна Φ_1. Но тогда $\sigma'(y) = \sigma_1(y)$ для всех переменных y, отличных от x. Поэтому, если формула $(\exists x)\Phi_1$ истинна на σ, то она истинна и на σ_1.

Если же x_1 отлично от x, то $((\exists x_1)\Phi_1)_t^x$ есть $(\exists x_1)(\Phi_1)_t^x$. Пусть на σ истинна $(\exists x_1)(\Phi_1)_t^x$. Тогда существует такое состояние σ' системы A, что $\sigma'(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от x_1, и на σ' истинна $(\Phi_1)_t^x$. Пусть $\sigma_1'(y) = \sigma'(y)$ для всех переменных y, отличных от x, и пусть $\sigma_1'(x) = \sigma_1(x)$. По индукционному предположению, на σ_1' истинна $(\Phi_1)_t^x$. Значит, $((\exists x_1)\Phi_1)_t^x$ истинна на σ_1, так как для y, отличных от x и x_1,

$$\sigma_1(y) = \sigma(y) = \sigma'(y) = \sigma_1'(y).$$

Случай, когда Q есть $\forall$, рассматривается аналогично. ∎

Лемма 3.18. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Ω, Φ — формула сигнатуры Ω, t — терм сигнатуры Ω, $(\Phi)_t^x$ определено, σ — такое состояние системы A, что $\sigma \models (\Phi)_t^x$. Тогда $\sigma \models (\exists x)\Phi$.*

Доказательство. Выберем такую переменную z, которая не входит в Φ и t. Тогда $((\Phi)^x_t)^x_z$ есть $(\Phi)^x_r$, где r есть $(t)^x_z$ (более общее утверждение содержится в упражнении 3.5.5). Пусть $\sigma_2(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от z, и $\sigma_2(z) = \sigma(x)$. Так как $((\Phi)^x_t)^z_x$ есть $(\Phi)^x_t$, то $\sigma_2((\Phi)^x_t) = \sigma((\Phi)^x_t)$ (лемма 3.17). По лемме 3.16, $\sigma_2((\Phi)^x_t) = \sigma_2((\Phi)^x_r)$. Следовательно, $(\Phi)^x_r$ истинна на σ_2. Рассмотрим теперь такое состояние σ_3 той же алгебраической системы, что $\sigma_3(y) = \sigma_2(y)$ для всех переменных y, отличных от x, и $\sigma_3(x) = \sigma_2(r)$. Имеем

$$\sigma_3(\Phi) = \sigma_3((\Phi)^x_r) = \sigma_2((\Phi)^x_r).$$

Значит, $(\exists x)\Phi$ истинна на σ_2. Так как $((\exists x)\Phi)^z_x$ есть $(\exists x)\Phi$, то по лемме 3.17, $\sigma_2((\exists x)\Phi) = \sigma((\exists x)\Phi)$. Итак, $(\exists x)\Phi$ истинна на σ. ∎

Лемма 3.19. *Пусть A — алгебраическая система сигнатуры Ω, Φ — формула сигнатуры Ω, t — терм сигнатуры Ω, $(\Phi)^x_t$ определено, σ — такое состояние системы A, что $\sigma \models (\forall x)\Phi$. Тогда $\sigma \models (\Phi)^x_t$.*

Доказательство. Если на σ ложно $(\Phi)^x_t$, то на $\sigma \models (\exists x)\neg\Phi$ (лемма 3.18) и $\sigma \models \neg(\forall x)\Phi$. Полученное противоречие доказывает лемму. ∎

Упражнения к §§3.4 —3.5

Упражнение 3.5.1. *Арифметикой называется система сигнатуры*

$$\langle +, *, 0, 1\rangle,$$

основное множество которой — это множество натуральных чисел, а $+, *, 0, 1$ — это обычные операции сложения и умножения и числа 0 и 1. Арифметической называется сигнатура арифметики.

Записать формулу, не содержащую свободных переменных, отличных от x, y, z, истинную в системе арифметической сигнатуры тогда и только тогда, когда

а) либо x, либо y есть нуль;

б) x является четным числом, а y является простым числом;

в) x меньше y;

г) z делит как x, так и y;

д) числа x и y являются взаимно простыми;

е) сложение коммутативно;

ж) сложение дистрибутивно относительно умножения;

з) всякое число является суммой трех квадратов;

и) существует наибольшее простое число.

Какие из этих формул е) — и) истинны в арифметике?

Упражнение 3.5.2. *Элементарной геометрией называется система сигнатуры $\langle P, L, F, C, B \rangle$, основное множество которой — это множество точек, прямых и плоскостей трехмерного евклидового пространства, а P, L, F, C, B — это соответственно одноместные отношения быть точкой, быть прямой и быть плоскостью, а также двухместное отношение принадлежности и трехместное отношение между тремя точками, утверждающее, что они лежат на одной прямой и вторая лежит между первой и третьей. Геометрической называется сигнатура элементарной геометрии.*

Записать формулу, истинную в системе геометрической сигнатуры тогда и только тогда, когда

а) через каждые две прямые проходит плоскость;

б) для каждой точки существует плоскость, не проходящая через эту точку;

в) существуют три точки, не лежащие ни на какой прямой;

г) для каждых двух различных точек существует точка, лежащая между ними.

Какие из этих формул истинны в элементарной геометрии?

Упражнение 3.5.3. *Рассмотрим сигнатуру, состоящую из одного символа двухместного отношения P. Каждая конечная система этой сигнатуры может быть задана таблицей, в которой строки и столбцы помечены элементами основного множества этой системы, а на пересечении строки и столбца помещается* 1 *или* 0 *в зависимости от того, принадлежит или нет пара элементов, помечающих эти строку и столбец, отношению P.*

а). Сколько существует различных таких систем с основным множеством $0, 1, 2, 3, 4$?

б). Упорядочим эти системы как последовательности длины 25 из нулей и единиц, считая ту из двух последовательностей меньше, у которой первый из неравных элементов меньше. Например,

$$0110000000000000000000000$$

больше, чем

$$0101111111111111111111111.$$

Какие места в этом порядке занимают системы с ложным для всех пар и с истинным для всех пар отношением P?

в). Для трех из этих систем с номерами 13, 6 и 8 проверить, истинна ли в них формула

$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\&\neg(\exists z)(P(x,z)\&\neg P(z,y))).$$

г). Придумать замкнутую формулу этой сигнатуры, которая истинна во всех этих пятиэлементных системах, но которая ложна в некоторой конечной системе.

д). Придумать замкнутую формулу этой сигнатуры, которая истинна во всех конечных системах этой сигнатуры с нечетным числом элементов, но которая ложна в некоторой конечной системе.

е). Придумать замкнутую формулу этой сигнатуры, которая истинна во всех конечных системах этой сигнатуры, но которая ложна в некоторой бесконечной системе.

Упражнение 3.5.4. *Описать алгебраическую систему, задающую расписание движения поездов на некоторой станции. Проверить, исходя из формальных определений, истинность в этой системе формул, утверждающих, что*

а) каждый поезд имеет и только одну конечную станцию;

б) в каждый конечный пункт каждый день ходит не более пяти разных поездов;

в) существует поезд, который следует до конечной станции более трех суток;

г) если два каких-то поезда имеют общий начальный пункт, то они имеют и общий конечный пункт.

Упражнение 3.5.5. *Если x — переменная; Φ — формула; t, r, s — термы, то $((\Phi)^x_t)^x_r$ есть $(\Phi)^x_s$, где s есть $(t)^x_r$ (в предположении, что все встречающиеся формулы определены). Доказать это.*

Упражнение 3.5.6. *Для любых переменной x и формулы Ψ определена формула $(\Psi)^x_x$. При этом $(\Psi)^x_x$ есть Ψ. Доказать это.*

Упражнение 3.5.7. *Если t — терм и переменная x не входит свободно в формулу Φ, то $(\Phi)^x_t$ есть Φ. Доказать это.*

Упражнение 3.5.8. *Если терм t не содержит переменных, а переменная x входит свободно в формулу Φ, то $(\Phi)^x_t$ определено. Доказать это.*

Упражнение 3.5.9. *Пусть переменные x_1, ..., x_n, x_{n+1} попарно различны и не входят в термы t_1, ..., t_n, t_{n+1} и Φ — такая формула, что*

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_{n+1}}_{t_1,\ldots,t_{n+1}}$$

определена. Доказать, что

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_{n+1}}_{t_1,\ldots,t_{n+1}}$$

совпадает с

$$((\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n})^{x_{n+1}}_{t_{n+1}}.$$

3.6 Формулировка исчисления предикатов

Итак, мы рассмотрели алфавит, содержащий сигнатурные символы отношений и операций, символ равенства, связки и символы кванторов, знаки для предметных переменных, скобки и запятую. Некоторые последовательности элементов этого алфавита мы назвали формулами и термами. Термам и формулам мы придали некоторый смысл: термы задают операции, а формулы — отношения на основном множестве рассматриваемой алгебраической системы рассматриваемой сигнатуры. Нашей ближайшей целью будет описание механизма, который порождает все тождественно истинные формулы.

Определение 3.6.1. *Как и в исчислении высказываний, мы будем также рассматривать кроме формул называемые секвенциями выражения вида* $\Gamma \vdash \Phi$*, где* $\vdash$ *— символ секвенции,* Γ *— последовательность формул, которая может быть и пустой, а* Φ *— формула.*

Пусть фиксирована сигнатура Ω. Формула далее в этой главе — формула сигнатуры Ω. Терм — терм сигнатуры Ω. Далее буквы x, y, z и эти буквы с индексами — предметные переменные; Φ, Ψ, Θ и эти буквы с индексами — формулы, Γ и Γ с индексами — последовательности формул, которые могут быть и пустыми; t, r, s и эти буквы с индексами — термы. Использование формулы $(\Phi)^x_t$ в правилах, выводах, доказательствах и т. п. предполагает, что эта формула определена.

Определение 3.6.2 (аксиом). *Аксиомами являются все секвенции следующих видов:*

а) $\Phi \vdash \Phi$*, где* Φ *— формула;*

б) $\vdash x = x$*, где* x *— переменная;*

в) $x = y\ (\Phi)^z_x \vdash (\Phi)^z_y$*, где* Φ *— такая формула, а* x*,* y*,* z *— такие переменные, что* $(\Phi)^z_x$ *и* $(\Phi)^z_y$ *определены.*

Определение 3.6.3 (схем правил вывода). *Схемы главных правил вывода собраны в определении 3.2.3, схемы* $\neg$*-правил вывода собраны в определении 3.2.4, дополнительные схемы правил вывода собраны в* *определении 3.2.5. Для этих схем мы сохраним ранее введенные в § 3.2 обозначения и нумерацию. Предикатные схемы правил вывода собраны в следующей таблице:*

	Антицедент	*Сукцедент*
$\forall$	$\dfrac{\Gamma\ (\Phi)_t^x \vdash \Theta}{\Gamma\ (\forall x)\Phi \vdash \Theta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma \vdash (\forall x)\Phi}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma\ \Phi \vdash \Theta}{\Gamma\ (\exists x)\Phi \vdash \Theta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi)_t^x}{\Gamma \vdash (\exists x)\Phi}$

Схемы первой строчки имеют последовательно номера 12 и 13, а схемы второй строчки — 14 и 15. Схема 12 обозначена $\forall \vdash$, схема 13 — $\vdash \forall$, схема 14 — $\exists \vdash$, схема 15 — $\vdash \exists$.

Определение 3.6.4 (правил вывода и доказательства). *Выберем число от 1 до 15. Если выбрано число от 1 до 11, то используем определение 3.2.6. В остальных случаях в качестве Γ выберем конкретную последовательность формул, которая может быть выбрана и пустой. Для схем 12 и 15 в качестве Φ и Θ выберем такие формулы, в качестве x — такую переменную, в качестве t — такой терм,что формула $(\Phi)_t^x$ определена. Для схемы 13 в качестве Φ выберем такую формулу, а в качестве x — такую переменную, что x не входит свободно ни в одну из формул Γ. Для схемы 14 в качестве Φ, Θ выберем такие формулы, а в качестве x — такую переменную, что x не входит свободно ни в Θ и ни в одну из формул Γ. Подставим в схему выбранного номера вместо Γ, Φ, Ψ, x, t их выбранные значения. Получим фигуру, над чертой и под чертой которой стоят секвенции. Полученную фигуру назовем правилом вывода. Скажем, что секвенция, стоящая под чертой, получается из секвенции, стоящей над чертой, по этому правилу вывода. Определения доказательства и дерева доказательства совпадают с определениями 3.2.7 и 3.2.8.*

Теоремы 3.2 и 3.3 и следствие из этой теоремы 3.3 справедливы и для исчисления предикатов.

Теорема 3.20 (о кванторах). *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные; $y_1, \ldots, y_n$ — такие, отличные от $x_1, \ldots, x_n$ переменные, которые попарно различны и не встречаются в формуле Φ.*

Следующие секвенции доказуемы:

а)

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\Phi \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{y_1,y_2,\dots,y_n};$$

б)

$$(\Phi)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{y_1,y_2,\dots,y_n} \vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\Phi.$$

Доказательство.

а. Пусть $n = 1$. Фигура

$$\frac{(\forall x_1)\Phi \vdash (\Phi)^{x_1}_{y_1}}{(\Phi)^{x_1}_{y_1} \vdash (\Phi)^{x_1}_{y_1}\ \text{акс}}\forall\vdash$$

является деревом доказательства с нужным корнем.

Пусть секвенция

$$(\forall x_2)\dots(\forall x_n)(\Phi)^{x_1}_{y_1} \vdash ((\Phi)^{x_1}_{y_1})^{x_2\dots x_n}_{y_2\dots y_n}$$

доказуема. Тогда все висячие вершины дерева

$$\frac{(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_n)\Phi \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{y_1,y_2,\dots,y_n}}{((\forall x_2)\dots(\forall x_n)\Phi)^{x_1}_{y_1} \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{y_1,y_2,\dots,y_n}}\forall\vdash$$

доказуемы.

б. Пусть $n = 1$. Фигура

$$\frac{(\Phi)^{x_1}_{y_1} \vdash (\exists x_1)\Phi}{(\Phi)^{x_1}_{y_1} \vdash (\Phi)^{x_1}_{y_1}\ \text{акс}}\vdash\exists$$

является деревом с нужным корнем.

Пусть секвенция

$$((\Phi)^{x_1}_{y_1})^{x_2\dots x_n}_{y_2\dots y_n} \vdash (\exists x_2)\dots(\exists x_n)(\Phi)^{x_1}_{y_1}$$

доказуема. Тогда все висячие вершины дерева

$$\frac{(\Phi)^{x_1,x_2,\dots,x_n}_{y_1,y_2,\dots,y_n} \vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_n)\Phi}{((\Phi)^{x_1}_{y_1})^{x_2\dots x_n}_{y_2\dots y_n} \vdash (\exists x_2)\dots(\exists x_n)(\Phi)^{x_1}_{y_1}}\vdash\exists$$

доказуемы. ∎

Теорема верна однако и в случае, когда $y_1,\dots,\, y_n$ — произвольные термы (а не только, когда они являются попарно различными переменными). Чтобы не повторяться, сформулируем общее утверждение, позволяющее в доказательствах утверждений о термах ограничиваться случаем, когда эти термы — попарно различные переменные.

Теорема 3.21. *Пусть переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различны, а переменные, входящие в термы $t_1, \dots, t_n$ отличны от $x_1, \dots, x_n$. Пусть секвенция*

$$\Phi_1 \dots \Phi_m \vdash \Theta$$

(соответственно, $\vdash \Theta$) доказуема. Тогда секвенция

$$(\Phi_1)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n} \dots (\Phi_m)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n} \vdash (\Theta)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n}$$

(соответственно, $\vdash (\Theta)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n}$) тоже доказуема, если все входящие в эту секвенцию формулы определены.

Доказательство. Сначала заметим, что левую часть секвенции можно считать пустой. Это заметим индукцией по m. Если $m = 0$, доказывать нечего. Если секвенция

$$\Phi_1 \dots \Phi_{m+1} \vdash \Theta$$

доказуема, то секвенция

$$\Phi_1 \dots \Phi_m \vdash (\Phi_{m+1} \to \Theta)$$

тоже доказуема. По индукционному предположению, секвенция

$$(\Phi_1)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n} \dots (\Phi_m)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n} \vdash ((\Phi_{m+1})^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n} \to (\Theta)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n})$$

тоже доказуема.

Пусть секвенция $\vdash \Theta$ доказуема. Пусть $n = 1$. Фигура

$$\dfrac{\dfrac{\vdash ((\forall x_1)\Theta \to (\Theta)^{x_1}_{t_1})}{(\forall x_1)\Theta \vdash (\Theta)^{x_1}_{t_1}} \to -\text{вв} \qquad \dfrac{\vdash (\forall x_1)\Theta}{\vdash \Theta} \vdash \forall}{\vdash (\Theta)^{x_1}_{t_1}} \to -\text{уд}$$

является деревом, все висячие вершины которого доказуемы.

Пусть теперь доказуема секвенция

$$\vdash (\Theta)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n}.$$

По предыдущему, доказуема секвенция

$$\vdash ((\Theta)^{x_1 \dots x_n}_{t_1 \dots t_n})^{x_{n+1}}_{t_{n+1}}.$$

Осталось использовать упражнение 3.5.9. ∎

Теорема 3.22. *Пусть Φ — формула; $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные переменные; $t_1, \ldots, t_n$ — такие термы, что формула $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}$ определена. Тогда доказуемы секвенции:*

а)

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\Phi \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{t_1,t_2,\ldots,t_n};$$

б)

$$(\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{t_1,t_2,\ldots,t_n} \vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\Phi.$$

Доказательство. а). Выберем переменные $y_1, \ldots, y_n$ так, чтобы они были попарно различны, отличны от $x_1, \ldots, x_n$, не входили в формулу Φ и в термы $t_1, \ldots, t_n$. По теореме 3.20, доказуема секвенция

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\Phi \vdash (\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n}.$$

Осталось заметить, что

$$((\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{y_1,y_2,\ldots,y_n})^{y_1,y_2,\ldots,y_n}_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$$

есть

$$(\Phi)^{x_1,x_2,\ldots,x_n}_{t_1,t_2,\ldots,t_n}.$$

Доказуемость секвенции б) доказывается аналогично. ∎

3.7 Теорема о равенстве

Теорема 3.23 (о равенстве). *Пусть термы $t_1, \ldots, t_n$, $r_1, \ldots, r_n$, t, r, s; попарно различные переменные $x_1, \ldots, x_n$ и формула Φ выбраны так, что*

$$(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n}, \quad (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{r_1,\ldots,r_n}$$

определены. Следующие секвенции доказуемы:

а). $\vdash t = t$;

б). $t = r \vdash r = t$;

в). $t = r\ \ r = s \vdash t = s$;

г).

$$t_1 = r_1 \ldots t_n = r_n \vdash (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} = (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{r_1,\ldots,r_n};$$

д).

$$t_1 = r_1 \ldots t_n = r_n \quad (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{t_1,\ldots,t_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{r_1,\ldots,r_n}.$$

Доказательство.

а). Пусть переменная x не входит в t. Секвенция $\vdash x = x$ является аксиомой. По теореме 3.21, секвенция $\vdash t = t$ доказуема.

б). Пусть переменные x и y различны и не входят в t и r. По теореме 3.21, достаточно доказать секвенцию $x = y \vdash y = x$.

Фигура

$$\dfrac{\dfrac{x = y \ x = x \vdash y = x \text{ акс}}{x = y \vdash (x = x \to y = x)} \to\!-\text{вв} \qquad \dfrac{\vdash x = x \text{ акс}}{x = y \vdash x = x}\text{ут}}{x = y \vdash y = x} \to\!-\text{уд}$$

является деревом доказательства, ибо секвенция $x = y \ x = x \vdash y = x$ получается по правилу в) определения аксиом, если в качестве Φ взять $z = x$, где z — отличная от x переменная.

в). Пусть x, y, z — попарно различные переменные, не входящие в t, r, s. По теореме 3.21, достаточно доказать секвенцию $x = y \ y = z \vdash x = z$. Заметим,что секвенция $y = z \ x = y \vdash x = z$ является аксиомой, так как получается по правилу в) определения аксиом, если в качестве Φ взять $x = u$, где u отлично от x. Поэтому дерево

$$\dfrac{y = z \ x = y \vdash x = z}{x = y \ y = z \vdash x = z}\text{пер}$$

является деревом доказательства.

г). Пусть $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n$ попарно различные переменные, а $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n$ не входят в t, $t_1, \ldots, t_n$. По теореме 3.21, достаточно доказать секвенцию

$$y_1 = z_1 \ldots y_n = z_n \vdash (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} = (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Пусть Φ есть $(t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} = t$. Тогда $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ есть

$$(t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} = (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n},$$

а $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}$ есть

$$(t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} = (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Пусть Γ есть $y_1 = z_1 \ldots y_n = z_n$. Секвенция

$$\vdash (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} = (t)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$$

доказуема по а). Поэтому все висячие вершины дерева

$$\dfrac{\Gamma \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \quad \Gamma \vdash ((\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \to (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n})}{y_1 = z_1 \ldots y_n = z_n \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}} \to\!-\text{уд}$$

доказуемы, если доказано д).

Итак, г) следует из д).

д). Пусть $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_n$ — отличные от $x_1, \ldots, x_n$ попарно различные переменные, не входящие в Φ, $t_1, \ldots, t_n$, $r_1, \ldots, r_n$. По теореме 3.21, достаточно доказать секвенцию

$$y_1 = z_1 \ldots y_n = z_n \ (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \vdash (\Phi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}.$$

Это будем доказывать индукцией по n. При $n = 1$ эта секвенция является аксиомой. Пусть все секвенции

$$y_1 = z_1 \ldots y_n = z_n \ (\Psi)^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n} \vdash (\Psi)^{x_1,\ldots,x_n}_{z_1,\ldots,z_n}$$

доказуемы. Пусть Γ_i обозначает

$$y_1 = z_1 \ldots y_i = z_i.$$

Пусть Φ_i обозначает $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_i}_{y_1,\ldots,y_i}$ и Φ^i обозначает $(\Phi)^{x_1,\ldots,x_i}_{z_1,\ldots,z_i}$. Рассмотрим фигуру

$$\dfrac{\dfrac{y_{n+1} = z_{n+1} \ \Phi_{n+1} \vdash ((\Phi)_n)^{x_{n+1}}_{z_{n+1}}}{\Gamma_{n+1} \ \Phi_{n+1} \vdash ((\Phi)_n)^{x_{n+1}}_{z_{n+1}}} \qquad \Gamma_{n+1} \ \Phi_{n+1} \vdash (((\Phi)_n)^{x_{n+1}}_{z_{n+1}} \to \Phi^{n+1})}{\Gamma_{n+1} \ \Phi_{n+1} \vdash \Phi^{n+1}} \ \to -\text{уд}$$

Эта фигура есть дерево, левая висячая вершина которого является аксиомой по правилу в) определения аксиом, а правая висячая вершина доказуема по индуктивному предположению. Поэтому корень этого дерева доказуем. ■

3.8 Непротиворечивость исчисления предикатов

Пусть A — алгебраическая система рассматриваемой сигнатуры Ω, σ является состоянием системы A, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ — формулы сигнатуры Ω.

Определение 3.8.1. *Секвенция*

$$\Phi_1 \ldots \Phi_n \vdash \Phi$$

истинна на σ, если одна из формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ ложна на σ либо если Φ истинна на σ.

Секвенция $\vdash \Phi$ истинна на σ, если формула Φ истинна на σ. Секвенция называется тождественно истинной, если она истинна на любом состоянии любой алгебраической системы рассматриваемой сигнатуры.

Заметим, что секвенция

$$\Phi_1 \dots \Phi_s \vdash \Phi$$

тогда и только тогда истинна на σ (тождественно истинна), когда формула

$$(\{\Phi_1 \dots \Phi_s\}^{\&} \to \Phi)$$

истинна на σ (соответственно, тождественно истинна).

Определение $\{\Phi_1 \dots \Phi_s\}^{\&}$ дается в определении 3.3.1.

Теорема 3.24. *Каждая доказуемая секвенция тождественно истинна.*

Доказательство. Индукцией по длине доказательства секвенции. Если длина равна 0, то секвенция есть аксиома. Все аксиомы видов а) и б) определения аксиом, как легко проверить, тождественно истинны. Тождественная истинность аксиом вида в) определения аксиом доказывается в лемме 3.16.

Пусть теперь секвенция получается из тождественно истинных секвенций по правилу вывода. Если это правило получается по одной из схем 1 — 11, этот случай уже разобран в доказательстве теоремы 3.5.

Рассмотрим оставшиеся четыре случая.

Схема 12. Пусть все формулы из Γ и $(\forall x)\Phi$ истинны на σ. Тогда $\sigma \models (\Phi)^x_t$ (лемма 3.19). Поэтому Θ истинна на σ и рассматриваемая секвенция тоже истинна на σ.

Схема 15. Пусть все формулы из Γ истинны на σ. Тогда $(\Phi)^x_t$ тоже истинна на σ. По лемме 3.18, $\sigma \models (\exists x)\Phi$.

Схема 13. Пусть x не входит свободно ни в одну из формул Γ и все формулы из Γ истинны на σ. Пусть σ_1 — любое такое состояние той же алгебраической системы, что $\sigma_1(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от x. Так как $(\Theta)^x_t$ есть Θ для каждой формулы Θ из Γ и каждого не содержащего x терма t (упражнение 3.5.7), то все формулы из Γ истинны на σ_1 (лемма 3.17). Поэтому Φ истинна на σ_1. Значит, $(\forall x)\Phi$ истинна на σ.

Схема 14. Пусть x не входит свободно ни в Θ и ни в одну из формул из Γ и все формулы из Γ и формула $(\exists x)\Phi$ истинны на σ. Тогда существует такое состояние σ_1 той же системы, что Φ истинна на σ_1 и $\sigma_1(y) = \sigma(y)$ для всех переменных y, отличных от x. Все формулы из Γ и Φ истинны на σ_1. Значит, Θ истинна на σ_1. Так как Θ не содержит x свободно, то Θ истинна и на σ. ∎

3.9 Предваренная форма

Определение 3.9.1 (эквивалентности формул). *Формулы Φ и Θ назовем эквивалентными, если обе секвенции $\Phi \vdash \Theta$ и $\Theta \vdash \Phi$ доказуемы. Формулу Φ назовем доказуемой, если секвенция $\vdash \Phi$ доказуема. Пишем $\Phi \equiv \Theta$, если формулы Φ и Θ эквивалентны.*

Леммы 3.7, 3.8 о замене и 3.9 о булевых эквивалентностях справедливы и для исчисления предикатов. Их доказательства, приведенные в § 3.3 для исчисления высказываний, без всяких изменений годятся и для исчисления предикатов.

Лемма 3.25. *Если $\Phi \equiv \Theta$, то*
а. $(\exists x)\Phi \equiv (\exists x)\Theta$.
б. $(\forall x)\Phi \equiv (\forall x)\Theta$.

Доказательство.

$$\cfrac{(\exists x)\Phi \vdash (\exists x)\Theta}{\cfrac{\Phi \vdash (\exists x)\Theta}{\Phi \vdash \Theta}\vdash\exists}\exists\vdash$$

$$\cfrac{(\forall x)\Phi \vdash (\forall x)\Theta}{\cfrac{(\forall x)\Phi \vdash \Theta}{\Phi \vdash \Theta}\forall\vdash}\vdash\forall$$

Применение правила $\exists \vdash$ возможно, так как $(\exists x)\Theta$ не содержит x свободно. Применение правила $\vdash \forall$ возможно, так как $(\forall x)\Phi$ не содержит x свободно. Надо также заметить, что для любых переменной x и формулы Ψ определена формула $(\Psi)^x_x$. При этом $(\Psi)^x_x$ есть (Ψ). Это — упражнение 3.5.6. ∎

Лемма 3.26. *Если переменная y не входит в формулу Φ, то*
а). $(\forall x)\Phi \equiv (\forall y)(\Phi)^x_y$.
б). $(\exists x)\Phi \equiv (\exists y)(\Phi)^x_y$.

Доказательство.
а).

$$\cfrac{(\forall x)\Phi \vdash (\forall y)(\Phi)^x_y}{\cfrac{(\forall x)\Phi \vdash (\Phi)^x_y}{(\Phi)^x_y \vdash (\Phi)^x_y \text{ акс}}\forall\vdash}\vdash\forall$$

Так как $((\Phi)^x_y)^y_x$ есть Φ, то секвенция

$$(\forall y)(\Phi)^x_y \vdash (\forall x)\Phi$$

доказывается аналогично.

б).

$$\dfrac{(\exists x)\Phi \vdash (\exists y)(\Phi)^x_y}{\dfrac{\Phi \vdash (\exists y)(\Phi)^x_y}{\Phi \vdash ((\Phi)^x_y)^y_x \text{ акс}}\;\vdash\exists}\;\exists\vdash$$

Секвенция

$$(\exists y)(\Phi)^x_y \vdash (\exists x)\Phi$$

доказывается аналогично. ∎

Лемма 3.27. *Пусть переменная x не входит в формулу Θ. Тогда*

а). $\neg(\exists x)\Phi \ \equiv (\forall x)\neg\Phi$.

б). $\neg(\forall x)\Phi \ \equiv (\exists x)\neg\Phi$.

в). $((\exists x)\Phi \vee \Theta) \ \equiv (\exists x)(\Phi \vee \Theta)$.

г). $((\forall x)\Phi \vee \Theta) \ \equiv (\forall x)(\Phi \vee \Theta)$.

д). $((\exists x)\Phi \& \Theta) \ \equiv (\exists x)(\Phi \& \Theta)$.

е). $((\forall x)\Phi \& \Theta) \ \equiv (\forall x)(\Phi \& \Theta)$.

Доказательство.

а).

$$\dfrac{\neg(\exists x)\Phi \vdash (\forall x)\neg\Phi}{\dfrac{\neg(\exists x)\Phi \vdash \neg\Phi}{\dfrac{\neg(\exists x)\Phi \ \neg\neg\Phi \vdash (\exists x)\Phi}{\neg\neg\Phi \vdash \Phi}\text{пер ут}\vdash\exists \qquad \neg(\exists x)\Phi \ \neg\neg\Phi \vdash \neg(\exists x)\Phi}\;\neg}\;\vdash\forall$$

Так как секвенция $\neg\neg\Phi \vdash \Phi$ доказуема (лемма 3.9.10)), то все висячие вершины этого дерева доказуемы.

Для доказательства секвенции

$$(\forall x)\neg\Phi \vdash \neg(\exists x)\Phi$$

сначала используем правило для $\neg$. После этого нужно будет доказывать две секвенции:

$$(\forall x)\neg\Phi \ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash (\Phi)^x_y,$$

$$(\forall x)\neg\Phi \ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash \neg(\Phi)^x_y.$$

Приведем доказательства этих секвенций. Обозначим $(\Phi)^x_y$ через Ψ.

$$\dfrac{(\forall x)\neg\Phi \ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash (\Phi)^x_y}{(\forall x)\neg\Phi \ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash (\exists x)\Phi \qquad \dfrac{(\forall x)\neg\Phi \ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash ((\exists x)\Phi \to \Psi))}{\dfrac{(\forall x)\neg\Phi \ (\exists x)\Phi \vdash \Psi}{\dfrac{\Phi \ (\forall x)\neg\Phi \vdash \Psi}{\Phi \ \neg\Phi \vdash \Psi}\;\forall\vdash}\exists\vdash\text{пер}}\text{ут} \ \to -\text{вв}}\;\to -\text{уд}$$

$$\dfrac{(\forall x)\neg\Phi\ \neg\neg(\exists x)\Phi \vdash \neg(\Phi)^x_y}{\neg(\Phi)^x_y \vdash \neg(\Phi)^x_y\ \text{акс}}\,\text{ут}\ \forall\vdash$$

Здесь использована доказуемость секвенции

$$\neg\neg(\exists x)\Phi \vdash (\exists x)\Phi$$

(лемма 3.9.10)), а в качестве y — переменная, не входящая в Φ и отличная от x. Применение правила $\exists\vdash$ законно, так как $(\forall x)\neg\Phi$ и $(\Phi)^x_y$ не содержат x свободно.

б). Для доказательства секвенции

$$\neg(\forall x)\Phi \vdash (\exists x)\neg\Phi$$

сначала используем правило для $\neg$. После этого нужно будет доказывать две секвенции:

$$\neg(\forall x)\Phi\ \neg(\exists x)\neg\Phi \vdash \neg(\forall x)\Phi,$$

$$\neg(\forall x)\Phi\ \neg(\exists x)\neg\Phi \vdash (\forall x)\Phi.$$

Первая секвенция получается из аксиомы по правилу утончения. Приведем доказательство второй секвенции.

$$\dfrac{\neg(\forall x)\Phi\ \neg(\exists x)\neg\Phi \vdash (\forall x)\Phi}{\dfrac{\neg(\exists x)\neg\Phi \vdash (\forall x)\Phi}{\neg(\exists x)\neg\Phi \vdash (\forall x)\neg\neg\Phi \qquad \dfrac{\neg(\exists x)\neg\Phi \vdash ((\forall x)\neg\neg\Phi \to (\forall x)\Phi)}{(\forall x)\neg\neg\Phi \vdash (\forall x)\Phi}\,\text{ут}\ \to-\text{вв}}\,\to-\text{уд}}\,\text{пер ут}$$

В этом дереве вторая висячая вершина доказуема по лемме 3.9.10) и лемме 3.25, а первая по пункту а) доказательства.

Докажем вторую секвенцию.

$$\dfrac{(\exists x)\neg\Phi \vdash \neg(\forall x)\Phi}{\dfrac{\neg\Phi \vdash \neg(\forall x)\Phi}{\dfrac{\neg\Phi\ \neg\neg(\forall x)\Phi \vdash \Phi}{\dfrac{\neg\neg(\forall x)\Phi \vdash \Phi}{\neg\neg(\forall x)\Phi \vdash (\forall x)\Phi \qquad \dfrac{\neg\neg(\forall x)\Phi \vdash ((\forall x)\Phi \to \Phi)}{(\forall x)\Phi \vdash \Phi}\,\text{ут}\ \to-\text{вв}}} \qquad \neg\Phi\ \neg\neg(\forall x)\Phi \vdash \neg\Phi}\,\neg}\,\exists\vdash$$

В этом дереве вторая висячая вершина доказуема по лемме 3.9.10). Первая висячая вершина доказуема по теореме 3.22.а).

в). Для доказательства секвенции

$$((\exists x)\Phi \vee \Theta) \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta)$$

воспользуемся правилом удаления дизъюнкции (разбором случаев). Надо доказать три секвенции:

$$((\exists x)\Phi \vee \Theta) \vdash ((\exists x)\Phi \vee \Theta),$$

$$((\exists x)\Phi \vee \Theta)\ (\exists x)\Phi \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta),$$

$$((\exists x)\Phi \vee \Theta)\ \Theta \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta).$$

Первая из них является аксиомой, а третья доказывается путем применения правил $\vdash \exists$ и введения дизъюнкции. Докажем вторую из этих секвенций.

$$\cfrac{((\exists x)\Phi \vee \Theta)\ (\exists x)\Phi \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta)}{\cfrac{(\exists x)\Phi \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta)}{\cfrac{\Phi \vdash (\exists x)(\Phi \vee \Theta)}{\cfrac{\Phi \vdash (\Phi \vee \Theta)}{\Phi \vdash \Phi}\vee-\text{вв}}\vdash\exists}\exists\vdash}\text{пер ут}$$

Секвенция

$$(\exists x)(\Phi \vee \Theta) \vdash ((\exists x)\Phi \vee \Theta)$$

доказывается применением правила $\exists \vdash$ и затем разбором случаев с использованием теоремы 3.22.

г). Аналогично в).

д). Обозначим $(\exists x)(\Phi\&\Theta)$ через Ψ. Имеем:

$$\frac{((\exists x)\Phi\&\Theta) \vdash (\exists x)(\Phi\&\Theta)}{((\exists x)\Phi\&\Theta) \vdash ((\exists x)\Phi \to \Psi) \quad ((\exists x)\Phi\&\Theta) \vdash (\exists x)\Phi} \to -\text{уд}$$

и

$$\frac{((\exists x)\Phi\&\Theta)\ (\exists x)\Phi \vdash \Psi}{((\exists x)\Phi\&\Theta)\ (\exists x)\Phi \vdash (\Theta \to \Psi) \quad ((\exists x)\Phi\&\Theta)\ (\exists x)\Phi \vdash \Theta} \to -\text{уд}.$$

По этой причине достаточно доказать секвенцию

$$(\exists x)\Phi\ \Theta \vdash (\exists x)(\Phi\&\Theta).$$

Докажем эту секвенцию.

$$\cfrac{(\exists x)\Phi\ \Theta \vdash (\exists x)(\Phi\&\Theta)}{\cfrac{\Theta\ \Phi \vdash (\exists x)(\Phi\&\Theta)}{\Theta\ \Phi \vdash (\Phi\&\Theta)}\vdash\exists}\text{пер }\exists\vdash$$

Секвенция

$$(\exists x)(\Phi\&\Theta) \vdash ((\exists x)\Phi\&\Theta)$$

доказывается аналогично.

е). Аналогично пункту д). ∎

Определение 3.9.2 (бескванторной формулы).

а). Каждая атомная формула является бескванторной формулой.

б). Если Φ, Θ — бескванторные формулы, то $(\Phi \vee \Theta)$, $(\Phi \& \Theta)$, $(\Phi \to \Theta)$, $\neg\Phi$ — тоже бескванторные формулы.

в). Формула является бескванторной только в том случае, когда можно доказать это, используя а) и б).

Определение 3.9.3 (предваренной формулы).

а). Каждая бескванторная формула является предваренной формулой и совпадает со своей матрицей. Кванторная приставка ее пуста.

б). Если Φ — предваренная формула, Π — ее кванторная приставка, Θ — ее матрица, а x — переменная, то $(\forall x)\Phi$ и $(\exists x)\Phi$ — тоже предваренные формулы с матрицей Θ. При этом кванторная приставка $(\forall x)\Phi$ есть $(\forall x)\Pi$, а кванторная приставка $(\exists x)\Phi$ есть $(\exists x)\Pi$.

в). Формула является предваренной только в том случае, когда это можно доказать, используя пункты а) и б).

Теорема 3.28. *Для каждой формулы Φ существует эквивалентная ей предваренная формула.*

Доказательство. Индукцией по сложности формулы Φ.

Если сложность равна 0, то Φ — атомная, а значит, предваренная.

Пусть формула Φ есть $\neg\Phi_1$, а Φ_1 эквивалентна предваренной формуле Θ_1. Тогда $\neg\Phi_1 \equiv \neg\Theta_1$. Индукцией по числу кванторов в кванторной приставке Π формулы Θ_1 построим предваренную формулу, эквивалентную $\neg\Theta_1$. Если Θ_1 не содержит кванторов (бескванторная), то $\neg\Theta_1$ является предваренной формулой. Если Π есть $(\exists x)\Pi'$ и Ψ есть матрица формулы Θ_1, то пусть $\neg\Pi'\Psi$ эквивалентна предваренной Θ_2. Тогда $\neg\Theta_1$ эквивалентна $(\forall x)\neg\Pi'\Psi$ (лемма 3.27.а)) и эквивалентна $(\forall x)\Theta_2$ (лемма 3.25.б)). Последняя формула предваренная (определение 3.9.3.б)). Если же Π_1 есть $(\forall x)\Pi'$, то при тех же Φ и Θ_2 формула $\neg\Theta_1$ эквивалентна $(\exists x)\Theta_2$.

Если Φ есть $(\exists x)\Phi_1$ или $(\forall x)\Phi_1$, а Φ_1 эквивалентна предваренной Θ_1, то Φ по лемме 3.25 эквивалентна $(\exists x)\Theta_1$ или $(\forall x)\Theta_1$, которые по определению 3.9.3.б) тоже предваренные.

Так как $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ эквивалентна $(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$ (лемма 3.9.1)) и $(\Phi_1 \& \Phi_2)$ эквивалентна $\neg(\neg\Phi_1 \vee \neg\Phi_2)$ (леммы 3.9 и 3.8), то осталось рассмотреть случай, когда Φ есть $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, а Φ_1 и Φ_2 — предваренные формулы. Так как

$$(\Phi_1 \vee \Phi_2) \equiv (\Phi_2 \vee \Phi_1),$$

то можно считать, что либо обе формулы Φ_1 и Φ_2 — бескванторные, либо кванторная приставка Φ_1 не является пустой.

Строить предваренную формулу, эквивалентную Φ, будем индукцией по общему числу кванторов у Φ_1 и Φ_2. Если обе эти формулы бескванторны, то Φ — предваренная.

Если Φ_1 есть $\Pi_1\Psi_1$ и Φ_2 есть $\Pi_2\Psi_2$, где Π_1 и Π_2 — кванторные приставки, а Ψ_1 и Ψ_2 — матрицы, то пусть Π_1 есть $(Qy)\Pi'$. Выберем такую переменную z, которая не встречается в Φ_1 и Φ_2. По лемме 3.26, Φ_1 эквивалентна $(Qz)(\Pi'\Psi_1)^y_z$. Формула $(\Pi'\Phi_1)^y_z$ тоже предваренная. По лемме 3.8, Φ эквивалентна

$$((Qz)(\Pi'\Phi_1)^y_z \vee \Phi_2).$$

Поэтому можно считать, что y не входит в Φ_2. Тогда

$$((Qy)\Pi'\Psi_1 \vee \Phi_2) \equiv (Qy)(\Pi'\Psi_1 \vee \Phi_2).$$

Число кванторов у $\Pi'\Psi_1$ и Φ_2 на один меньше, чем у Φ_1 и Φ_2. Поэтому

$$(\Pi'\Psi_1 \vee \Phi_2)$$

эквивалентна предваренной формуле Φ'. Но тогда

$$(\Phi_1 \vee \Phi_2)$$

эквивалентна $(Qy)\Phi'$ по лемме 3.25. ∎

Пример 3.9.1.

Рассмотрим формулу

$$(((\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1)\&(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \to$$
$$(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2))$$

сигнатуры Ω_1, описанной в примере 3.4.1. Эта формула эквивалентна формуле

$$(\neg((\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1)\&(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2))\vee$$
$$(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2))$$

(лемма 3.9). Так как

$$\neg((\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1)\&(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \equiv$$

$$(\neg(\exists x_1)(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1) \vee \neg(\exists z)(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \equiv$$
$$((\forall x_1)\neg(\exists y_1)R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z)\neg(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2)) \equiv$$
$$((\forall x_1)(\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z,x_2,y_2)),$$

то рассматриваемая формула эквивалентна формуле

$$(((\forall x_1)(\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z,x_2,y_2))\vee$$
$$(\exists x_2)(\exists y_2)R(y,z,x_2,y_2))$$

(лемма 3.8.г)). Последняя формула эквивалентна формуле

$$(\exists x_3)(\exists y_3)(((\forall x_1)(\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1)\vee$$
$$(\forall z)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z,x_2,y_2)) \vee R(y,z,x_3,y_3))$$

(леммы 3.25, 3.26 и 3.27 и лемма 3.8). Так как

$$((\forall x_1)(\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z,x_2,y_2)) \equiv$$
$$((\forall x_1)(\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z_2)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z_2,x_2,y_2)) \equiv$$
$$(\forall x_1)((\forall y_1)\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee (\forall z_2)(\forall x_2)(\forall y_2)\neg R(y,z_2,x_2,y_2)) \equiv$$
$$(\forall x_1)(\forall z_2)(\forall y_1)(\forall x_2)(\forall y_2)(\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee \neg R(y,z_2,x_2,y_2))$$

(леммы 3.25, 3.26 и 3.27 и леммы 3.8 и 3.9), то рассматриваемая формула эквивалентна формуле

$$(\exists x_3)(\exists y_3)(\forall x_1)(\forall z_2)(\forall y_1)(\forall x_2)(\forall y_2)$$
$$((\neg R(x,z,x_1,y_1) \vee \neg R(y,z_2,x_2,y_2)) \vee R(y,z,x_3,y_3))$$

(леммы 3.25, 3.27 и леммы 3.8 и 3.9). Из-за ассоциативности дизъюнкции (лемма 3.9.5), в матрице полученной формулы можно по-другому расставить скобки.

Упражнения к §§3.6—3.9

Упражнение 3.9.1. *Доказать эквивалентности г) и е) леммы 3.27.*

Упражнение 3.9.2. *Будем рассматривать формулы и секвенции сигнатуры* $\langle +, *, 0, 1, \leq \rangle$. *Привести формальные доказательства секвенций:*

1)

$(x+0)=(x+1)\ (x+1)=(x+y)\vdash(x+0)=(x+y);$
2)
$1=0\vdash(1+1)=(1+0);$
3)
$(x+1)=x\ (x+y)=x\vdash(x+y)=(x+1);$
4)
$(1+1)=0\vdash(\exists x)(x+x)=0;$
5)
$(\forall x)x=(x+0)\vdash(1+0)=1;$
6)
$(\forall x)(x+0)=x\vdash(\forall x)(\exists y)(x+y)=x;$
7)
$(\forall x)x=(x+0)\vdash\neg(\exists x)\neg x=(x+0);$
8)
$(\exists x)(\forall y)(y+y)=x\vdash(\forall y)(\exists x)(y+y)=x;$
9)
$\vdash(\forall y)(\exists x)(y+y)=x;$
10)
$(\forall x)(\exists y)x=(y+y)\vdash(\exists y)1=(y+y);$
11)
$(1+1)=1\vdash(1+(1+1))=1;$
12)
$(\forall x)(x\leq y\&0=1)\vdash((\forall x)x\leq y\&0=1);$
13)
$(\forall x)\neg x=(x+1)\vdash\neg(\exists x)x=(x+1);$
14)
$x=(x+0)\ x\leq y\vdash(x+0)\leq y;$
15)
$(\forall x)(\forall y)((x+y)+1)=(x+(y+1))\vdash(\forall y)(\forall x)(x+(y+1))=((x+y)+1);$
16)
$\neg(\forall x)(x+1)=0\vdash(\exists x)\neg(x+1)=0.$

Упражнение 3.9.3. *Построить эквивалентные предваренные формы для формул (7), (8), (9), встречающихся в примерах §3.4. Привести формальные доказательства этих эквивалентностей.*

3.10 Полнота исчисления предикатов

Напомним, что мы зафиксировали некоторую конечную или счетную сигнатуру Ω и под формулами и термами понимаем формулы и термы этой сигнатуры Ω. Формулу, в которую никакая переменная не входит свободно, называют замкнутой.

Определение 3.10.1 (противоречивости множества формул). *Множество формул T назовем противоречивым, если существует такая формула Ψ и последовательность формул Γ, что все формулы, входящие в Γ, содержатся в T и обе секвенции $\Gamma \vdash \Psi$, $\Gamma \vdash \neg\Psi$ доказуемы. Множество формул T называется непротиворечивым, если оно не является противоречивым.*

Определение 3.10.2 (модели множества формул). *Алгебраическая система A сигнатуры Ω называется моделью для множества формул T, если все формулы из T истинны в A.*

Определение 3.10.3 (следствия из множества формул). *Формула Φ является следствием из множества формул T, если существует такая конечная, быть может, пустая, последовательность формул Γ, что все формулы, входящие в Γ, содержатся в T и секвенция $\Gamma \vdash \Phi$ доказуема.*

Определение 3.10.4 (полноты множества формул). *Множество формул T называется полным, если для каждой замкнутой формулы либо она сама, либо ее отрицание является следствием из T.*

Если Φ является следствием из T,то говорят еще, что Φ выводима из T или следует из T.

Заметим сразу, что всякое надмножество полного множества формул тоже полно. Ясно также, что если Φ выводимо из T и T' содержит T, то Φ выводимо из T'. В частности, каждая доказуемая формула является следствием каждого множества формул. Кроме того, каждое подмножество непротиворечивого множества формул тоже непротиворечиво, а каждое надмножество противоречивого — противоречиво. Если A является моделью для T, то A является моделью и для всякого подмножества множества формул T. Легко доказать также, что объединение возрастающей последовательности непротиворечивых множеств тоже непротиворечиво.

В дальнейшем мы предполагаем рассматриваемую сигнатуру конечной или счетной. Это означает, что множество всех сигнатурных символов конечно или счётно. При этом предположении множества всех формул и, значит, всех замкнутых формул рассматриваемой сигнатуры счётны и мы фиксируем некоторое перечисление

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots$$

всех замкнутых формул рассматриваемой сигнатуры.

Теорема 3.29. *Каждое непротиворечивое множество T замкнутых формул содержится в некотором полном непротиворечивом множестве замкнутых формул.*

Доказательство. Пусть T_0 есть T. Пусть T_i уже построено и непротиворечиво. Если Φ_i выводима из T_i, то пусть T_{i+1} есть T_i. Если же Φ_i не является следствием из T_i, то пусть T_{i+1} получается из T_i добавлением формулы $\neg\Phi_i$.

Заметим, что T_{i+1} непротиворечиво. Действительно, пусть все формулы из Γ содержатся в T_{i+1} и обе секвенции $\Gamma \vdash \Theta$, $\Gamma \vdash \neg\Theta$ доказуемы. Так как T_i непротиворечиво, то Φ_i не является следствием из T_i, а T_{i+1} получается из T_i добавлением формулы $\neg\Phi_i$. При этом среди членов Γ встречается $\neg\Phi_i$.

Используя правило перестановки несколько раз, получаем, что доказуемы секвенции

$$\Gamma' \; \neg\Phi_i \ldots \neg\Phi_i \vdash \Theta$$

и

$$\Gamma' \; \neg\Phi_i \ldots \neg\Phi_i \vdash \neg\Theta,$$

где все формулы из Γ' входят в T_i и отличны от $\neg\Phi_i$. Пусть в левой части последних секвенций $\neg\Phi_i$ встречается k раз. Пусть

$$\Gamma' \; \neg\Phi_i \ldots \neg\Phi_i$$

есть $\Gamma'' \; \neg\Phi_i$. Тогда секвенции

$$\Gamma'' \; \neg\Phi_i \vdash \Theta$$

и

$$\Gamma'' \; \neg\Phi_i \vdash \neg\Theta$$

доказуемы. Следовательно, секвенция $\Gamma'' \vdash \Phi_i$ доказуема (правило для $\neg$). Так как при $k > 1$ секвенция $\Gamma'' \vdash \neg\Phi_i$ тоже доказуема (ибо она получается из аксиомы $\neg\Phi_i \vdash \neg\Phi_i$ перестановками и уточнениями), то заменяя $\Gamma'' \; \neg\Phi_i$ на Γ'' и Θ на Φ_i, уменьшим k на 1. Значит, можно предполагать, что $k = 1$. Однако при $k = 1$ последовательность Γ'' состоит только из формул, входящих в T_i, и совпадает с Γ'. Поэтому в этом случае доказуемость $\Gamma'' \vdash \Phi_i$ противоречит выбору T_{i+1}.

Итак, T_{i+1} непротиворечиво.

Следовательно, все множества формул $T_0, T_1 \ldots$ непротиворечивы.

Поэтому и объединение T' множеств T_i для всех натуральных i тоже непротиворечиво. Ясно, что это объединение содержит T.

Докажем, что T' — полное множество. Рассмотрим произвольную замкнутую формулу Φ. Пусть Φ есть Φ_i. Если Φ выводима из T_i, то Φ выводима и из T'. Если же Φ не выводима из T_i, то $\neg\Phi$ входит в T_{i+1} и, значит, в T', а потому $\neg\Phi$ выводима из T' (так как секвенция $\neg\Phi \vdash \neg\Phi$ является аксиомой). ∎

Теорема 3.30 (о существовании модели). *Всякое непротиворечивое множество T замкнутых формул имеет модель.*

Доказательство. Наряду с первоначальной сигнатурой Ω будем рассматривать также расширенную сигнатуру Ω', получающуюся из Ω добавлением счетного множества новых нульместных символов операций $c_1, c_2, \ldots$.

Мы фиксируем некоторое перечисление Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2,... всех замкнутых формул расширенной сигнатуры Ω'.

Пусть $n(0) = 0$ и T_0 есть T. Заметим, что все формулы из T не содержат новых символов, добавленных к старой сигнатуре Ω. Пусть T_i и $n(i)$ уже построены и все формулы из T_i не содержат новых символов c_j для $j > n(i)$. Пусть T_i непротиворечиво. Если формула Ψ_i не начинается с квантора существования,то $n(i+1) = n(i)$ и T_{i+1} есть T_i. Если же формула Ψ_i имеет вид $(\exists x)\Psi$, пусть натуральное число m таково, что $m > n(i)$ и $m > j$ для всех таких j, что c_j встречается в Ψ_i. Пусть T_{i+1} получается из T_i добавлением формулы

$$((\exists x)\Psi \to (\Psi)^x_{c_m})$$

и пусть $n(i+1) = m$.

Покажем, что T_{i+1} непротиворечиво. Достаточно рассмотреть случай,когда Ψ_i имеет вид $(\exists x)\Psi$. Пусть T_{i+1} противоречиво. Тогда найдется такая последовательность Γ содержащихся в T_{i+1} формул и такая формула Θ, что секвенции $\Gamma \vdash \Theta$ и $\Gamma \vdash \neg\Theta$ доказуемы.

Обозначим

$$((\exists x)\Psi \to (\Psi)^x_{c_m})$$

через Θ_i. Если Θ_i не является членом Γ, то T_i противоречиво, что противоречит условию. Поэтому Θ_i входит в Γ.

Используя несколько раз правило перестановки, получим, что

$$\Gamma' \; \Theta_i \ldots \Theta_i \vdash \Theta$$

и

$$\Gamma' \ \Theta_i \ldots \Theta_i \vdash \neg\Theta$$

доказуемы, где Γ' — последовательность формул из T_i, а формула Θ_i встречается в левых частях секвенций k раз, где $k > 0$.

Если $k > 1$, то левая часть рассматриваемых секвенций имеет вид $\Gamma_1 \ \Theta_i$, где в Γ_1 формула Θ_i входит уже $k-1$ раз. Кроме того секвенции

$$\Gamma_1 \ \Theta_i \vdash \Theta$$

и

$$\Gamma_1 \ \Theta_i \vdash \neg\Theta$$

доказуемы. Так как тогда

$$\Gamma_1 \ \neg\neg\Theta_i \vdash \Theta$$

и

$$\Gamma_1 \ \neg\neg\Theta_i \vdash \neg\Theta$$

тоже доказуемы (например, первая из этих двух секвенций получается по правилу удаления импликации из секвенций

$$\Gamma_1 \ \neg\neg\Theta_i \vdash \Theta_i \tag{10}$$

и

$$\Gamma_1 \ \neg\neg\Theta_i \vdash (\Theta_i \to \Theta), \tag{11}$$

которые доказуемы; для доказательства (10) надо использовать пункт 10) леммы 3.9 о булевых эквивалентностях, а потом правила утончения и перестановки; (11) получается из уже доказанной секвенции применением утончения и перестановки, а затем правила введения импликации), то секвенция

$$\Gamma_1 \vdash \neg\Theta_i$$

доказуема (правило для $\neg$). Так как при $k > 1$

$$\Gamma_1 \vdash \Theta_i$$

тоже доказуема, то можно уменьшить k на 1. Итак, можно считать,что $k = 1$. В этом случае Γ_1 есть Γ'.

Вспомним,что по лемме 3.9 доказуема секвенция

$$\neg\Theta_i \vdash ((\exists x)\Psi \& \neg(\Psi)^x_{c_m}).$$

По правилу введения импликации, доказуема секвенция

$$\vdash (\neg\Theta_i \to ((\exists x)\Psi\&\neg(\Psi)^x_{c_m})).$$

Используя несколько раз правило утончения, получаем доказательство секвенции

$$\Gamma_1 \vdash (\neg\Theta_i \to ((\exists x)\Psi\&\neg(\Psi)^x_{c_m})).$$

Так как секвенция

$$\Gamma_1 \vdash \neg\Theta_i$$

тоже доказуема, то секвенция

$$\Gamma' \vdash ((\exists x)\Psi\&\neg(\Psi)^x_{c_m})$$

доказуема (правило удаления импликации). Поэтому секвенции

$$\Gamma' \vdash (\exists x)\Psi$$

и

$$\Gamma' \vdash \neg(\Psi)^x_{c_m}$$

доказуемы.

Пусть переменная y не встречается в формулах, входящих в секвенции из доказательства секвенции

$$\Gamma' \vdash \neg(\Psi)^x_{c_m}.$$

Заметим, что секвенция

$$\Gamma' \vdash \neg(\Psi)^x_y$$

тоже доказуема. Мы заметим даже более общее утверждение.

Если переменная y не встречается в формуле Φ, то пусть $(\Phi)^c_y$ получается из Φ заменой каждого вхождения нульместного символа операции c на вхождение y.

Утверждение (А). *Пусть переменная y не встречается в формулах, входящих в секвенции из доказательства секвенции*

$$\Theta_1 \ldots \Theta_s \vdash \Psi,$$

а c — нульместный символ операции. Тогда секвенция

$$(\Theta_1)^c_y \ldots (\Theta_s)^c_y \vdash (\Psi)^c_y$$

тоже доказуема.

Заметим сразу,что в нашем случае $\neg(\Psi)^x_y$ получается из $\neg(\Psi)^x_{c_m}$ заменой каждого вхождения c_m на вхождение y.

Доказательство утверждения A. Доказываем индукцией по длине доказательства секвенции

$$\Theta_1 \dots \Theta_s \vdash \Psi.$$

Базис индукции очевиден. Далее надо рассмотреть 15 случаев в зависимости от того, по какому правилу последняя секвенция доказательства получается из предыдущих в доказательстве рассматриваемой секвенции. Рассмотрение каждого случая тривиально. ∎

Из доказуемости

$$\Gamma' \vdash \neg(\Psi)^x_y$$

следует доказуемость

$$\Gamma' \vdash (\forall y)\neg(\Psi)^x_y.$$

Из эквивалентности $(\forall y)\neg(\Psi)^x_y$ и $\neg(\exists y)(\Psi)^x_y$ (леммы о булевых эквивалентностях, замене и 3.27) следует, что секвенция

$$\Gamma' \vdash \neg(\exists y)(\Psi)^x_y$$

тоже доказуема. Из эквивалентности $(\exists y)(\Psi)^x_y$ и $(\exists x)(\Psi)$ (лемма 3.26) следует, что

$$\Gamma' \vdash \neg(\exists x)\Psi$$

доказуема.

Получили, что T_i противоречиво, что противоречит условию. Значит T_{i+1} непротиворечиво. Значит, объединение T' всех множеств T_i тоже непротиворечиво.

По теореме 3.29, существует полное и непротиворечивое (в сигнатуре Ω' !) множество S замкнутых формул сигнатуры Ω', содержащее T'.

Построим теперь алгебраическую систему A' сигнатуры Ω' следующим образом. Пусть

$$C = \{c_i : i = 0, 1, \dots\}.$$

На множестве C рассмотрим отношение $\approx$, полагая $c_i \approx c_j$ тогда и только тогда, когда формула $c_i = c_j$ является следствием из S.

Заметим сначала, что $\approx$ является отношением эквивалентности.

Действительно, формула $c_i = c_i$ доказуема (теорема 3.23). Поэтому она следует из S. Значит, отношение $\approx$ рефлексивно.

Пусть $c_i \approx c_j$. Тогда формула $c_i = c_j$ следует из S. Значит, существует такая последовательность Γ формул из S, что секвенция

$$\Gamma \vdash c_i = c_j$$

доказуема. Так как секвенция

$$\vdash (c_i = c_j \to c_j = c_i)$$

тоже доказуема (теорема 3.23), то секвенция

$$\Gamma \vdash c_j = c_i$$

доказуема. Значит, отношение $\approx$ симметрично.

Пусть $c_i \approx c_j$ и $c_i \approx c_k$. Тогда формулы $c_i = c_j$ и $c_j = c_k$ следуют из S. Несколько раз используя правило перестановки и утончения, найдем такую последовательность Γ формул из S, что секвенции $\Gamma \vdash c_i = c_j$ и $\Gamma \vdash c_j = c_k$ доказуемы. По теореме 3.23, секвенция $\Gamma \vdash c_i = c_k$ тоже доказуема. Значит, S транзитивно.

Разобьем C на классы эквивалентных по $\approx$ элементов и для c из C через $[c]$ обозначим класс эквивалентности по отношению $\approx$, содержащий c.

Множество полученных классов эквивалентности обозначим через $[C]$.

Зададим на $[C]$ операции и отношения, символы которых входят в Ω', и получим алгебраическую систему A' сигнатуры Ω' с основным множеством $[C]$.

Если P — нульместный символ отношения из Ω', то $P^{A'}$ истинно тогда и только тогда, когда формула P следует из S.

Если f — нульместный символ операции из Ω', то $f^{A'}$ есть $[c]$ для любого такого c из C, что $f = c$ следует из S (например, $c_i^{A'}$ есть $[c_i]$).

Если P — n-местный символ отношения из Ω' и $a_1, \ldots, a_n$ из C, то

$$\langle [a_1], \ldots, [a_n] \rangle$$

в $P^{A'}$ тогда и только тогда, когда формула $P(a_1, \ldots, a_n)$ следует из S.

Докажем сначала корректность этого определения. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ лежат в C и $b_1, \ldots, b_n$ лежат в C, $a_1 \approx b_1, \ldots, a_n \approx b_n$, а формула $P(a_1, \ldots, a_n)$ следует из S для n-местного символа отношения P из Ω'. Тогда существует такая последовательность Γ формул из S, что секвенции

$$\Gamma \vdash a_1 = b_1, \ldots, \Gamma \vdash a_n = b_n,$$

$$\Gamma \vdash P(a_1, \ldots, a_n)$$

доказуемы. Используя теорему 3.23, получаем доказательство секвенции

$$\Gamma \vdash P(b_1, \ldots, b_n).$$

Если f — n-местный символ операции из Ω' и $a_1, \ldots, a_n$ из C, то существует такой с в C, что $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ выводима из S.

Действительно, формула

$$(\exists x) f(a_1, \ldots, a_n) = x$$

является замкнутой формулой сигнатуры Ω' и есть Ψ_i для некоторого натурального i. Формула

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

доказуема (теорема 3.23). Поэтому по правилу $\vdash \exists$, формула

$$(\exists x) f(a_1, \ldots, a_n) = x$$

тоже доказуема. По определению T_{i+1}, найдется такое i, что формула

$$((\exists x) f(a_1, \ldots, a_n) = x \to f(a_1, \ldots, a_n) = c_m)$$

лежит в T_{i+1} и, значит, в S. Но тогда из S следует и формула

$$f(a_1, \ldots, a_n) = c_m,$$

которая является следствием двух предыдущих формул. Если f — n-местный символ операции из Ω'; $a_1, \ldots, a_n$ из C; $b_1, \ldots, b_n$ из C; $a_1 \approx b_1$; $\ldots$; $a_n \approx b_n$; $f(a_1, \ldots, a_n) = c'$ следует из S и $f(b_1, \ldots, b_n) = c''$ следует из S, то $\mathrm{c}' \approx \mathrm{c}''$.

Действительно, найдется такая последовательность Γ формул из S, что секвенции

$$\Gamma \vdash a_1 = b_1, \ldots, \Gamma \vdash a_n = b_n,$$

$$\Gamma \vdash f(a_1, \ldots, a_n) = c', \quad \Gamma \vdash f(b_1, \ldots, b_n) = c''$$

доказуемы.

Секвенция

$$a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n \vdash f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$$

тоже доказуема (теорема 3.23.г)). Поэтому секвенции

$$\Gamma \vdash f(a_1, \ldots, a_n) = c'', \quad \Gamma \vdash c' = f(a_1, \ldots, a_n), \quad \Gamma \vdash c' = c''$$

доказуемы. Поэтому $c' \approx c''$.

Таким образом определение операции $f^{A'}$ корректно: эта операция всегда определена и определена однозначно.

Из леммы 3.17 следует, что значение замкнутой формулы в алгебраической системе не зависит от рассматриваемого состояния. Мы докажем, что в алгебраической системе A' сигнатуры Ω' истинность любой замкнутой формулы равносильна ее выводимости из S. Так как все формулы из T содержатся в S, то все формулы из T истинны в A'. Рассмотрим теперь обеднение системы A' до системы A сигнатуры Ω, получающееся из A' отбрасыванием значений символов из C.

Более подробно, основное множество системы A совпадает с основным множеством системы A', а символам сигнатуры Ω в A поставлены в соответствие те же отношения или операции, что и в алгебраической системе A'. Так как формулы из T не содержат новых символов из C, то истинность этих формул в A совпадает с истинностью в A'. Поэтому A является моделью для T. На этом доказательство теоремы о существовании модели заканчивается.

Итак, индукцией по сложности замкнутой формулы сигнатуры Ω' доказываем, что она тогда и только тогда истинна в A', когда она выводима из S.

Базис индукции. Формула атомная. Если она имеет вид P, где P — символ нульместного отношения из Ω', то это следует из определения.

Индукцией по числу символов операций в замкнутом терме t сигнатуры Ω' докажем,что значение t в A' есть $[c]$, где c из C, тогда и только тогда, когда формула $t = c$ следует из S.

Если t есть нульместный символ операции f, то значение t есть $f^{A'}$ и равно $[c']$ для любого такого c' из C, что $f = c$ выводимо из S.

Если t есть $f(t_1, \ldots, t_n)$, где f — n-местный символ операции из Ω', а $t_1, \ldots, t_n$ — замкнутые термы сигнатуры Ω', то значение t в A' есть

$$f^{A'}([d_1], \ldots, [d_n]),$$

где $[d_i]$ — значение терма t_i для $i = 1, \ldots, n$. По индукции, формулы $t_1 = d_1, \ldots, t_n = d_n$ выводимы из S. По определению, значение t есть $[d]$ для любого такого d, что формула

$$f(d_1, \ldots, d_n) = d$$

следует из S. Таким образом, найдется такая последовательность Γ формул из S, что секвенции

$$\Gamma \vdash t_1 = d_1, \ldots, \Gamma \vdash t_n = d_n, \quad \Gamma \vdash f(d_1, \ldots, d_n) = d$$

доказуемы. Но тогда секвенция

$$\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_n) = d$$

тоже доказуема.

Наоборот, пусть формула $t = c'$ следует из S, где c' из C. Пусть $[d]$ — значение t в A'. По предыдущему, $t = d$ следует из S. Значит, найдется такая последовательность Γ формул из S, что $\Gamma \vdash t = c'$ и $\Gamma \vdash t = d$ доказуемы. Но тогда и секвенция $\Gamma \vdash d = c'$ тоже доказуема. По этой причине, $[c'] = [d]$ и $[c']$ является значением терма t.

Пусть формула имеет вид $t_1 = t_2$, $[d_1]$ — значение t_1 в A' и $[d_2]$ — значение t_2 в A', t_1 и t_2 — замкнутые термы, а d_1 и d_2 взяты из C.

По предыдущему, формулы $t_1 = d_1$ и $t_2 = d_2$ следуют из S. Если теперь формула $t_1 = t_2$ истинна в A', то $[d_1] = [d_2]$ и, по определению, $d_1 = d_2$ следует из S. Итак, существует такая последовательность Γ формул из S, что секвенции $\Gamma \vdash t_1 = d_1$, $\Gamma \vdash t_2 = d_2$ и $\Gamma \vdash d_1 = d_2$ доказуемы. Но тогда и секвенция $\Gamma \vdash t_1 = t_2$ доказуема.

Если же $t_1 = t_2$ следует из S, то аналогично получим, что $d_1 = d_2$ следует из S и, значит, $[d_1] = [d_2]$ и формула $t_1 = t_2$ истинна в A'.

Остался случай, когда формула имеет вид $P(t_1, \ldots, t_n)$, а замкнутые термы $t_1, \ldots, t_n$ сигнатуры Ω' имеют в A' значения $[d_1], \ldots, [d_n]$. В этом случае $t_1 = d_1, \ldots, t_n = d_n$ следуют из S. Истинность $P(t_1, \ldots, t_n)$ в A' равносильна тому, что $P(d_1, \ldots, d_n)$ следует из S. Аналогично предыдущему, $P(d_1, \ldots, d_n)$ следует из S тогда и только тогда, когда $P(t_1, \ldots, t_n)$ следует из S.

Индукционный шаг. Формула имеет вид $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$, $\neg\Phi_1$, $(\exists x)\Phi_1$ или $(\forall x)\Phi_1$, а для более простых формул утверждение уже доказано.

Случай 1. $\neg\Phi_1$. Если Φ_1 истинна в A', то Φ_1 следует из S. Из непротиворечивости S следует, что $\neg\Phi_1$ не следует из S. Если $\neg\Phi_1$ истинна в A', то Φ_1 ложна в A' и, значит, не следует из S. Из полноты S следует, что $\neg\Phi_1$ следует из S.

Случай 2. $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$. Если $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ истинна в A', то либо Φ_1, либо Φ_2 истинна в A' и, значит, Φ_1 или Φ_2 следует из S. Но тогда по правилу введения дизъюнкции, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ следует из S. Если $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ следует из S, но ни Φ_1, ни Φ_2 не следуют из S, то (в силу полноты) $\neg\Phi_1$ и

$\neg\Phi_2$ следуют из S. Поэтому $(\neg\Phi_1\&\neg\Phi_2)$ следует из S (правило &-вв). Но $(\neg\Phi_1\&\neg\Phi_2)$ эквивалентно $\neg(\Phi_1 \vee \Phi_2)$.

Заметим, что если Φ эквивалентна Ψ и Φ следует из S, то и Ψ следует из S.

Действительно, пусть Γ последовательность формул из S и $\Gamma \vdash \Phi$ доказуема. Так как $\vdash (\Phi \to \Psi)$, доказуема, то $\Gamma \vdash \Psi$ тоже доказуема (правило удаления импликации).

Итак, $\neg(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ следует из S, а это противоречит непротиворечивости S. Значит, если $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ следует из S, то либо Φ_1 следует из S, либо Φ_2 следует из S. Поэтому либо Φ_1, либо Φ_2 истинна в A' и $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ истинна в A'.

Случай 3. $(\Phi_1\&\Phi_2)$. Если $(\Phi_1\&\Phi_2)$ истинна в A', то и Φ_1, и Φ_2 истинны в A' и выводимы из S. Поэтому $(\Phi_1\&\Phi_2)$ выводима из S (правило введения конъюнкции). Если же $(\Phi_1\&\Phi_2)$ выводима из S, то и Φ_1, и Φ_2 выводимы из S. Значит, обе эти формулы истинны в A' и поэтому их конъюнкция тоже истинна в A'.

Случай 4. $(\Phi_1 \to \Phi_2)$. Формула $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ ложна в A' только в случае, когда Φ_1 истинна в A', а Φ_2 ложна в A'. Значит, в этом случае Φ_1 и $\neg\Phi_2$ следуют из S. Поэтому $(\Phi_1\&\neg\Phi_2)$ следует из S. Но $(\Phi_1\&\neg\Phi_2)$ эквивалентна $\neg(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$ и $\neg(\Phi_1 \to \Phi_2)$. Значит, $\neg(\Phi_1 \to \Phi_2)$ следует из S и,в силу непротиворечивости S, $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ не следует из S. Если же $(\Phi_1 \to \Phi_2)$ истинна в A', то либо Φ_1 ложна в A', либо Φ_2 истинна в A'. Поэтому либо $\neg\Phi_1$ следует из S, либо Φ_2 следует из S. По правилу введения дизъюнкции, формула $(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$ следует из S. Однако $(\neg\Phi_1 \vee \Phi_2)$ эквивалентна $(\Phi_1 \to \Phi_2)$. Поэтому эта импликация следует из S.

Прежде, чем рассматривать оставшиеся случаи, докажем следующее

Утверждение (Б). *Пусть Ψ — формула сигнатуры Ω', c лежит в C, σ — такое состояние системы A', что $\sigma(x) = [c]$.*

Ψ тогда и только тогда истинна в A' на σ, когда $(\Psi)^x_c$ истинна в A' на σ.

Доказательство утверждения Б. Доказывается индукцией по сложности формулы Ψ.

Если Ψ — атомная формула, достаточно заметить, что значение терма t на σ совпадает со значением терма $(t)^x_c$ на σ. Если Ψ есть $(\exists x)\Psi_1$, то Ψ совпадает с $(\Psi)^x_c$. Если Ψ есть $(\exists y)\Psi_1$ и y не есть x, то $(\Psi)^x_c$ есть, как известно, $(\exists y)(\Psi_1)^x_c$. Если теперь σ' отличается от σ разве что на y, то по индукционному предположению истинностные значения Ψ_1 и $(\Psi_1)^x_c$ на σ' совпадают. Поэтому истинностные значения Ψ и $(\Psi)^x_c$ на

σ_1 тоже совпадают. На этом мы заканчиваем набросок доказательства утверждения Б. ■

Случай 5. $(\exists x)\Phi_1$. Если $(\exists x)\Phi_1$ истинна в A', то $(\Phi_1)^x_c$ истинна в A' при некотором c из C_1 (предложение Б и определение A' помогают доказать этот факт). Значит, $(\Phi_1)^x_c$ следует из S. Поэтому $(\exists x)\Phi_1$ следует из S (правило $\vdash \exists$). Пусть $(\exists x)\Phi_1$ следует из S. Так как формула $(\exists x)\Phi_1$ есть Ψ_i при некотором i, то формула

$$((\exists x)\Phi_1 \to (\Phi_1)^x_{c_m})$$

входит в T_{i+1} и, значит, в S для некоторого m. Поэтому $(\Phi_1)^x_{c_m}$ следует из S (правило удаления импликации). Из этого вытекает истинность $(\Phi_1)^x_{c_m}$ и, значит, $(\exists x)\Phi_1$ в A'.

Случай 6. $(\forall x)\Phi_1$. Если $(\forall x)\Phi_1$ истинна в A', то $(\exists x)\neg\Phi_1$ ложна в A'. Если $(\exists x)\neg\Phi_1$ выводима из S, то, по предыдущему, $\neg(\Phi_1)^x_{c_m}$ выводима из S для подходящего m и истинна в A'. Поэтому $\neg(\exists x)\neg\Phi_1$ выводима из S. Но $\neg(\exists x)\neg\Phi_1$ эквивалентна $(\forall x)\Phi_1$. Значит, $(\forall x)\Phi_1$ выводима из S. Если же $(\forall x)\Phi_1$ выводима из S, но ложна в A', то $(\Phi_1)^x_c$ ложно в A' для некоторого c из C. Поэтому $\neg(\Phi_1)^x_c$ и, значит, $(\exists x)\neg\Phi_1$ выводима из S (индукционное предположение и правило $\vdash \exists$). Но $(\exists x)\neg\Phi_1$ эквивалентна $\neg(\forall x)\Phi_1$. Поэтому $\neg(\forall x)\Phi_1$ тоже выводима из S, что противоречит непротиворечивости S. ■

Теорема 3.31 (о полноте исчисления предикатов). *Всякая тождественно истинная секвенция доказуема в исчислении предикатов.*

Доказательство. Заметим, что лемма 3.6 и доказательство ее дословно переносятся на исчисление предикатов. Значит, достаточно рассмотреть случай секвенции вида $\vdash \Phi$, где Φ — тождественно истинная формула. Так как формула $(\forall x)\Phi$ тоже тождественно истинна, а из доказуемости $(\forall x)\Phi$ следует доказуемость Φ, то можно ограничиться случаем, когда Φ — замкнутая формула, заменяя Φ на $(\forall z_1)\ldots(\forall z_s)\Phi$, где $z_1,\ldots,z_s$ составляют список всех переменных, свободно входящих в Φ. Так как Φ тождественно истинна, то, по теореме существования модели, $\{\neg\Phi\}$ является противоречивым множеством. Следовательно, для некоторого Θ секвенции $\neg\Phi\ldots\neg\Phi \vdash \Theta$ и $\neg\Phi\ldots\neg\Phi \vdash \neg\Theta$ доказуемы. Пусть левая часть их имеет длину k. Если $k > 1$, то, обозначая левую часть через $\Gamma\neg\Phi$, получаем, что секвенция $\Gamma \vdash \Phi$ доказуема (правило для $\neg$). Так как $\Gamma \vdash \neg\Phi$ тоже доказуема, то можно уменьшить k на 1. Если же $k = 1$, получаем доказуемость $\vdash \Phi$. ■

Упражнения

Упражнение 3.10.1. *Привести пример замкнутой формулы логики предикатов, истинной во всех конечных системах той же сигнатуры, но не доказуемой.*

Упражнение 3.10.2. *Доказать теорему о том, что надмножество противоречивого множества формул противоречиво.*

Упражнение 3.10.3. *Доказать теорему о том, что объединение возрастающей последовательности непротиворечивых множеств формул тоже непротиворечиво.*

Упражнение 3.10.4. *Доказать теорему о том, что если каждое конечное подмножество некоторого счетного множества формул непротиворечиво, то и само это счетное множество непротиворечиво.*

Упражнение 3.10.5. *Доказать теорему о том, что если некоторая формула имеет модель, то она имеет и конечную или счетную модель.*

Упражнение 3.10.6. *Доказать теорему о том, что если некоторая формула имеет конечные модели с как угодно большим числом элементов, то она имеет и бесконечную модель.*

Упражнение 3.10.7. *Доказать теорему о том, что не существует замкнутой формулы, истинной во всех конечных системах той же сигнатуры и ложной во всех бесконечных системах той же сигнатуры.*

Предметный указатель